Etablir le tableau de variation de la fonction homographique f définie par $f : x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$

1. Trouver la forme canonique

Definition : la forme canonique pour une fonction homographique est la forme suivante :

$$\frac{\alpha}{cx+d} + \beta$$

La trouver revient à définir les valeurs de α et β telle que $\frac{\alpha}{cx+d} + \beta = \frac{ax+b}{cx+d}$

Afin d'établir les valeurs de α et β , il faut mettre au même dénominateur les termes de la forme canonique. C'est-à-dire :

De cette forme développée, on peut en déduire les valeurs de α et β par correspondance dans l'égalité suivante :

$$\frac{\beta cx + \alpha + \beta d}{cx+d} = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$\beta c = a$$

$$\alpha + \beta d = b$$

$$\beta = \frac{a}{c}$$

$$\alpha = b - \beta d$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{a}{c} \\ \alpha = b - \frac{ad}{c} \end{array} \right.$$

$$\alpha = b - \frac{ad}{c}$$

2. Etablir le tableau de variation à partir de la forme canonique

Nous avons à disposition, la fonction homographique $f(x)$ sous sa forme canonique $\frac{\alpha}{cx+d} + \beta$.

Cette forme nous permet d'établir une correspondance entre sa variation et celle de la fonction inverse :

(Dans la suite $\|$ représente la non définition de la fonction pour la valeur interdite $-\frac{d}{c}$)

si $\frac{\alpha}{c} > 0$, $f(x)$ varie de la même manière que $\frac{1}{x}$. ($\searrow \| \searrow$)

si $\frac{\alpha}{c} < 0$, $f(x)$ varie de dans l'autre sens. ($\nearrow \| \nearrow$)