IUT PARIS DESCARTES

TFE

Fractales : Triangle de Sierpiński

Armand LANCKRIET Meven STEPHAN

24/03/2017

Les fractales sont des objets mathématiques comme une courbe ou une surface qui ne changent pas de structure mathématique quelle que soit l’échelle d'observation. Les fractales sont observables dans la nature : en effet certaines fougères et le chou de romanesco sont des fractales. On s'intéresse ici au triangle de Sierpiński et à ses applications. Nous allons dans un premier temps étudier la construction du triangle de Sierpiński pour dans un second temps analyser les dérivées du triangle de Sierpiński.

Sommaire

I) Définition et construction du triangle de Sierpiński

A) Qu'est-ce que le triangle de Sierpiński

1) Définition

Le triangle de Sierpiński est une fractale de Wacław Sierpiński, mathématicien connu pour ses contributions à la théorie des ensembles, la théorie des nombres, la théorie des fonctions et la topologie. Il est le résultat d'un processus itératif. On part d'un triangle que l'on partage en 4 triangles en joignant les milieux des côtés, et on supprime le triangle central. Il nous reste trois triangles; dans chacun d'eux, on réitère l'opération et on supprime le triangle central, et ainsi de suite.

2) Calcul de l'aire

Calcul de l'aire du triangle de Sierpinski :
À la première itération, on supprime un quart de l'aire A1 et il nous reste l'aire$A_1 = \frac{3A}{4}$.
Pour chaque itération, on supprime un quart de l'aire du triangle, donc:

- À la $nième$ itération on supprime un quart de l'aire des 3^{n-1} triangles d'aireA_{n-1}. L'aire restante est donc$A_n = \frac{3}{4}\, A_{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^n A$.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

Nous pouvons conclure que l'aire du triangle de Sierpiński est égale à zéro quand n tend vers l'infini.

3) Dimension fractale

Une droite est de dimension 1 parce que pour se repérer sur une droite il faut un seul nombre. C'est l'abscisse d'un point. Elle négative à gauche de l'origine et positive à sa droite.
Une surface est de dimension 2 parce que pour se repérer dans ce plan, on peut tracer deux droites perpendiculaires et repérer la position des points par rapport à ces deux axes qui sont l'abscisse et l'ordonnée.
L'espace dans lequel nous vivons est de dimension 3.

Ici, on représente une figure qui occupe plus le plan qu'une droite sans pour autant occuper le plan autant qu'une surface. La dimension de cette fractale, appelée dimension fractale, est donc comprise entre 1 et 2.

Soit N le nombre par lequel est multiplié le nombre de triangle noir entre deux étapes.

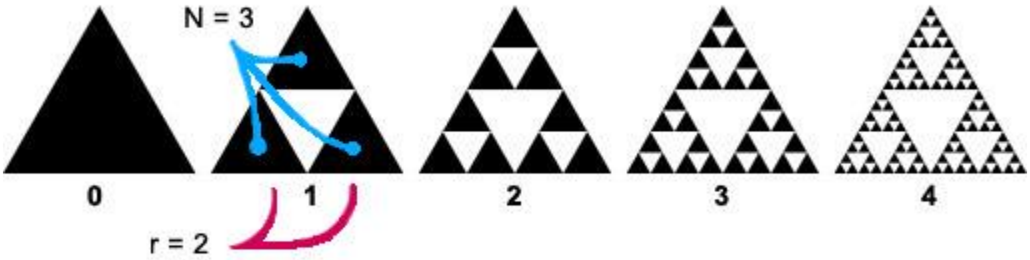
- On remarque qu'à l'étape 0, on obtient un seul triangle, à l'étape 1, on a trois triangles puis 9 triangles à l'étape 2 et 27 à l'étape 3.

Donc N = 3 car le nombre de triangles est multiplié par 3 à chaque itération.

On cherche maintenant à savoir par combien est divisée la longueur d'un côté à chaque étape.

- On observe que, à chaque itération, le nombre de triangles ayant un côté appartenant à la base du triangle de rang 0 passe de 1 à l'étape 0 puis, 2 après une itération et 4 après 2 itérations.

Le nombre de triangles ayant un côté appartenant à la base du triangle de l'étape 0 double à chaque itération. Donc r = 2.



Or la dimension fractale de Hausdorff D du triangle de Sierpiński est égale à $D = \frac{\log N}{\log r}$.

Donc, $D = \frac{\log 3}{\log 2}$ = 1,585

B) Construction du triangle de Sierpiński à l'aide de la théorie du chaos

1) Définition de la théorie du chaos

La théorie du chaos ou jeu du chaos pour les fractales a été créée par Michael Barnsley en 1993. Il s'agit d'une méthode simple et rapide de création de fractales utilisant un polygone et un point initial choisi au hasard dans ce polygone.

La fractale est définie en créant, par itérations successives une séquence de points.

Le point initial est placé aléatoirement. Chaque point de la séquence est positionné à une fraction donnée de la distance qui sépare le point précédent d'un des sommets du polygone. Ce sommet est choisi aléatoirement à chaque itération.

En répétant ce processus un nombre de fois important, et en ignorant les premiers points de la suite, un motif fractal apparaît dans la plupart des cas.

2) Application de la théorie du chaos au triangle de Sierpiński

Sur un triangle quelconque, on crée un point aléatoire qui appartient ou non au triangle formé par les 3 sommets. On trace ensuite le point médian entre un sommet du triangle (quelconque) et le point choisi.
On répète cette étape plusieurs centaines de fois pour créer le contour du triangle de Sierpiński et si on répète plusieurs milliers de fois, on peut voir le triangle de Sierpiński apparaître.
Si, le point de départ n'appartient pas au triangle, à force d'itérations successives, il finira par « rentrer » dans le triangle. Une fois le point à l'intérieur il ne sort jamais du triangle formé par les 3 sommets.

La fractale est créée en créant, par itérations successives une séquence de points. Partant d'un point x_0 du plan et k points, les itérations successives créent la suite de points x_n telle que $x_n = f_i(x_{n-1})$ où f_i est une homothétie de rapport $r, r \in (0 < r < 1)$ centrée sur l'un des points choisi aléatoirement.
L'ensemble des points converge vers l'attracteur concerné si le point x_0 appartient à l'attracteur, alors tous les points appartiendront à l'attracteur.

3) Algorithme permettant d'observer la création du triangle de Sierpiński

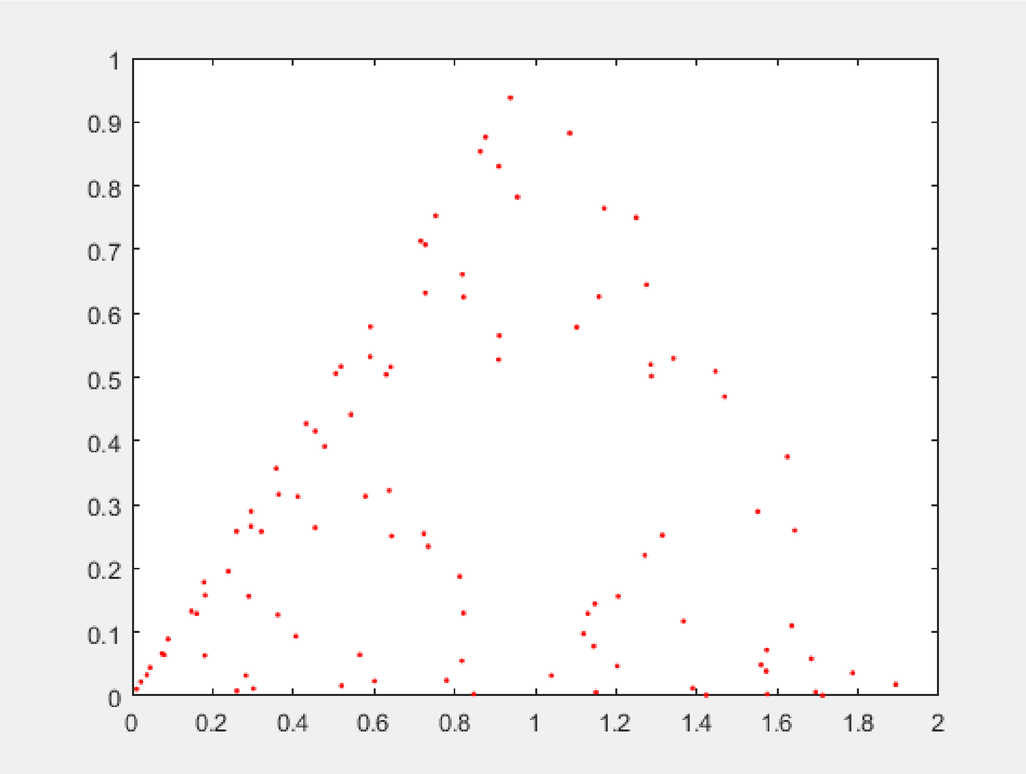
Cet algorithme Matlab illustre la construction du triangle de Sierpiński à l'aide de la méthode du chaos.

Algorithme:

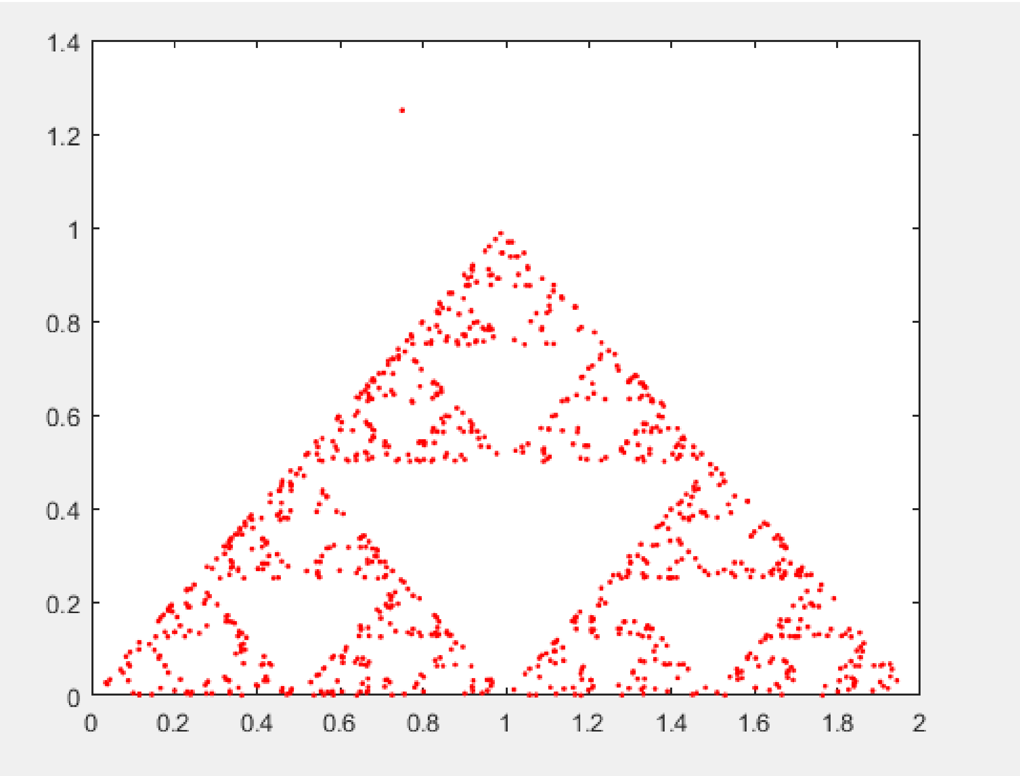
```
A=(x1,y1) #coordonnées du sommet A
B=(x2,y2) #coordonnées du sommet B
C=(x3,y3) #coordonnées du sommet C
T=(x,y) #coordonnées du premier point
n= _    #choisir le nombre d'itérations
    for k=1 to n
        s=random(0,1,2) #fonction pour choisir aléatoirement un sommet à chaque itération.
            if s=0
                x=x+.5*(x1-x); #création du point médian
                y=y+.5*(y1-y);
                    else if s>0
                        if s=1
                            x=x+.5*(x2-x);
                            y=y+.5*(y2-y);
                        else
                            x=x+.5*(x3-x);
                            y=y+.5*(y3-y);
                        end
             end
```

Voici ce que nous obtenons après:

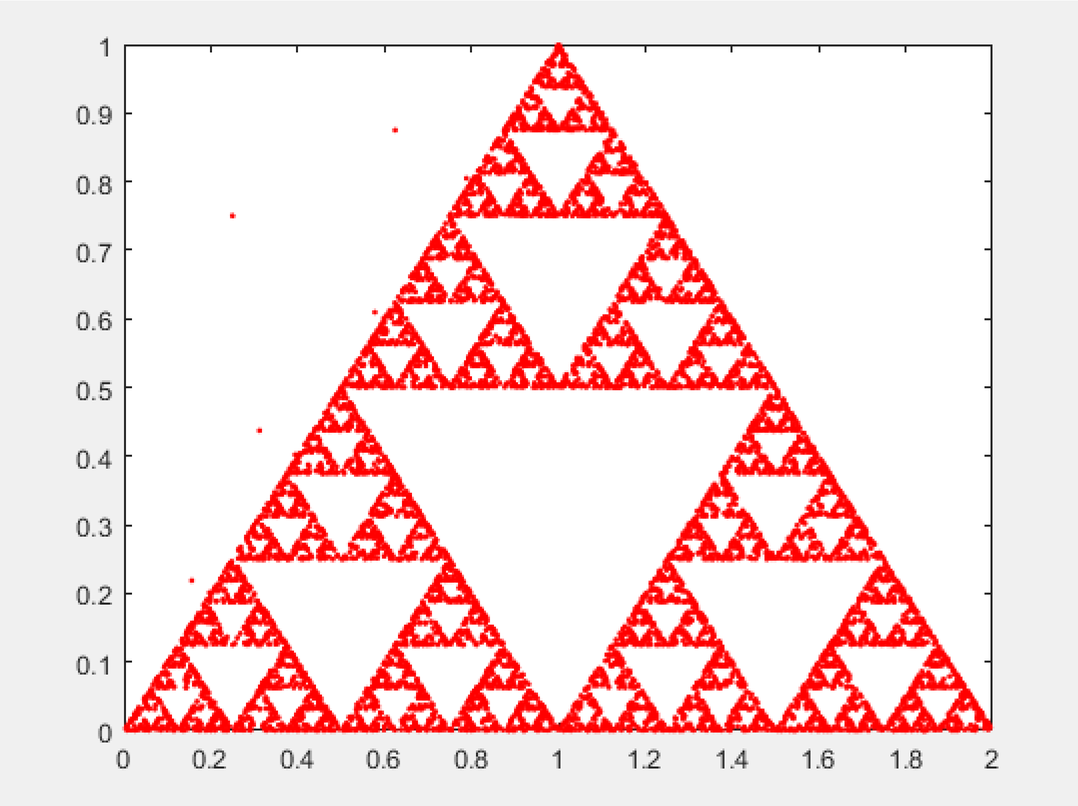
100 itérations :



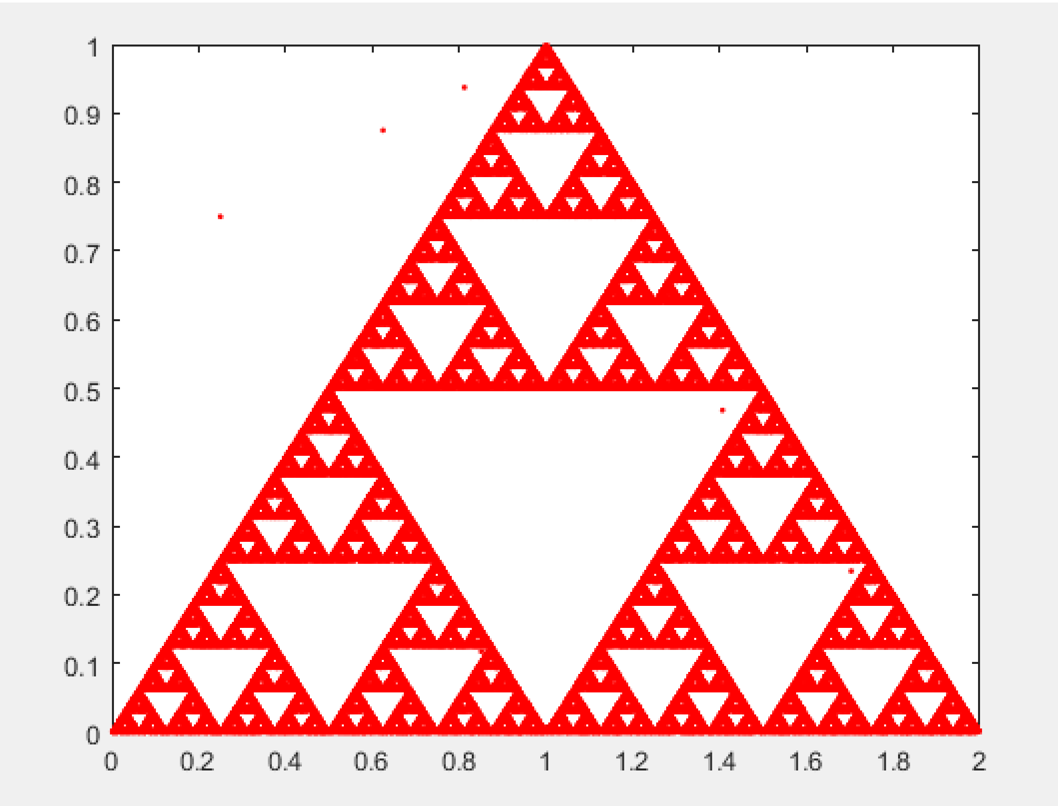
1 000 itérations :



10 000 itérations :



100 000 itérations :



II) Dérivés du triangle de Sierpiński

A) Le triangle de Pascal

C’est une représentation des coefficients binomiaux dans un triangle. La construction du triangle est liée aux coefficients binomiaux selon la règle suivante :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

1

1 1

1 **2** 1

1 3 3 1

1 **4 6 4** 1

1 5 **10 10** 5 1

1 **6** 15 **20** 15 **6** 1

1 7 21 35 35 21 7 1

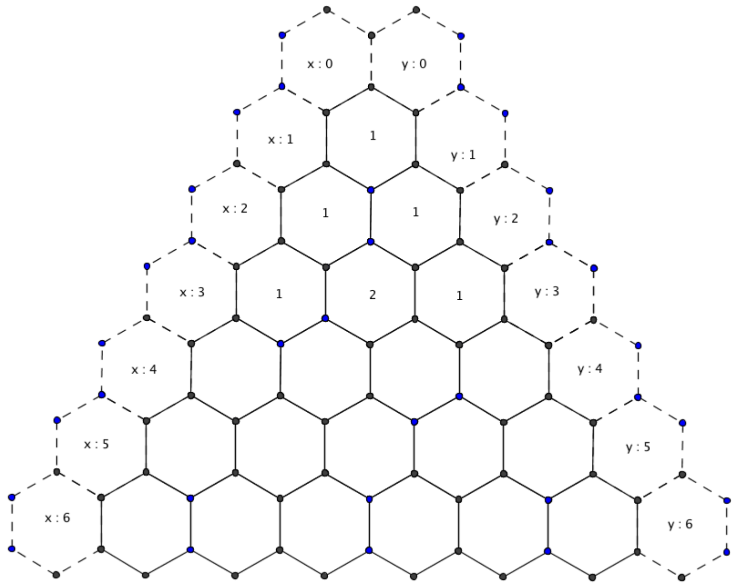
1 **8 28 56 70 56 28 8** 1

1 9 **36 84 126 126 84 36** 9 1

1 10 45 **120 210 252 210 120** 45 10

1 11 55 165 **330 462 462 330** 165 55 11 1

On peut voir le triangle de Sierpiński qui se dessine sous les nombres mod2.
La base 2 permet en une seconde de voir si nous avons un nombre divisible par 2, car si un nombre se termine par 0 (en mod2), cela veut dire que celui-ci est divisible par 2. On utilise cette technique car elle permet de créer un lien entre le triangle de Sierpiński et le triangle de Pascal.



Donnons des coordonnées à nos nombres dans le triangle de Pascal : le nombre 1 se trouve à la coordonnée (0,0), le 2 se trouve à la coordonnée (1,1).

Remarque : Plus le triangle est grand, plus il y a de nombres pairs.

B) Théorème de Lucas

Théorème : $\binom{n}{k} = \prod_{i=1}^{n} \binom{ni}{ki} (mod\ p)$ avec p nombre premier.
Ou $n = n_l p^l + n_{l-1} p^{l-1} + \cdots + n_1 p + p_0$
Et $k = k_l p^l + k_{l-1} p^{l-1} + \cdots + k_1 p + k_0$

Le théorème de Lucas sert, dans notre cas, à savoir si une valeur du triangle de Pascal est un nombre impair ou pair.

Pour cela, on choisit deux nombres n et k.
On transforme les 2 nombres de la base 10 à la base 2.
On écrit les deux nombres l'un en dessous de l'autre
Puis on compare en colonne : le nombre est impair si et seulement si il n'y a aucun 0 au-dessus d'un 1. C'est le corollaire du théorème de Lucas appliqué en base 2.

Exemple 1: On prend le nombre dans la ligne 10, colonne 4, ce nombre est 210
Donc n = 10 et k = 4
On transforme n et k en valeurs binaires
Donc n = 1010 en base 2 et k = 100 en base 2

1	0	1	0
	1	0	0
ok	faux	ok	ok

Le nombre est bien pair car il y a un 1 en dessous d'un 0 dans la comparaison.

Exemple 2 : On prend le nombre dans la ligne 10, colonne 8, ce nombre est 45
Donc n = 10 et k = 8
On transforme n et k en valeurs binaires
Donc n = 1010 en base 2 et k = 1000 en base 2

1	0	1	0
1	0	0	0
ok	ok	ok	ok

Il n'y a aucun 0 au-dessus d'un 1, donc le nombre trouvé est bien impair.

Preuve :

On admet que $(1+x)^{p^r} \equiv 1+\ x^{p^r}$

On considère$(1+x)^n$, si $(\overline{n_m n_{m-1} \dots n_0})_p$est la représentation de n dans la base p, alors, pour tout $0 \le n_k \le p-1$ et pour tout$0 \le k \le m$, $n = n_m p^m + n_{m-1}p^{m-1} + \cdots + n_1 p + n_{0.}$

On a :

$(1+x)^n = (1+x)^{n_m p^m + n_{m-1}p^{m-1} + \cdots + n_1 p + n_0}$

$(1+x)^n = \left[(1+x)^{p^m}\right]^{n_m}\left[(1+x)^{p^{m-1}}\right]^{n_{m-1}} \dots [(1+x)^p]^{n_1} + (1+x)^{n_0}$

$(1+x)^n \equiv \left(1+x^{p^m}\right)^{n_m}\left(1+x^{p^{m-1}}\right)^{n_{m-1}} \dots (1+x^p)^{n_1}(1+x)^{n_0}$

On cherche le coefficient de x^i dans$(1+x)^n$. $i = i_m p^m + i_{m-1}p^{m-1} + \cdots + i_1 p + i_{0.}$

On cherche le coefficient de$(x^{p^m})^{i_m}\ (x^{p^{m-1}})^{i_{m-1}}\ \dots (x^p)^{i_1} x^{i_0}$.

Le coefficient de chacun des $(x^{p^k})^{n_k}$ vient de la formule du binôme de Newton de$(1+x^{p^k})^{n_k}$, lequel est $\binom{n_k}{i_k}$.Donc, on fait le produit de chacun des$\binom{n_k}{i_k}$. On obtient alors :

$$\binom{n}{i} \equiv \prod_{k=1}^{n} \binom{n_k}{i_k} \ (mod\ p)$$

C) Tapis de Sierpiński

On prend un carré que l'on subdivise en 9 autres carrés. On choisit de garder un des 9 carrés en fonction d'une probabilité p.
On répète l'opération parmi les carrés que l'on a conservés en les re-subdivisant en 9 autres carrés.

Si p est grand, alors il y a de grandes composantes connexes.

<u>Dimension du tapis :</u>

La dimension du tapis dépend de la valeur de p.

→ Elle est nulle si $p < \frac{1}{16}$

En effet on multiplie le nombre de carré par 16 à chaque étape.

On conserve donc en moyenne $16 \times p$ carré (espérance), donc si $p < \frac{1}{16}$ alors on conserve en moyenne moins de 1 carré à chaque itération.

→ Sinon la dimension D est égale $= 2 - \frac{(|\log p|)}{(\log 4)}$.

Il est possible que l'objet n'existe pas, c'est le cas si l'objet est vide. C'est ce qui arrive quand on ne conserve aucun carré. Si p est très petit, l'objet sera forcément vide.

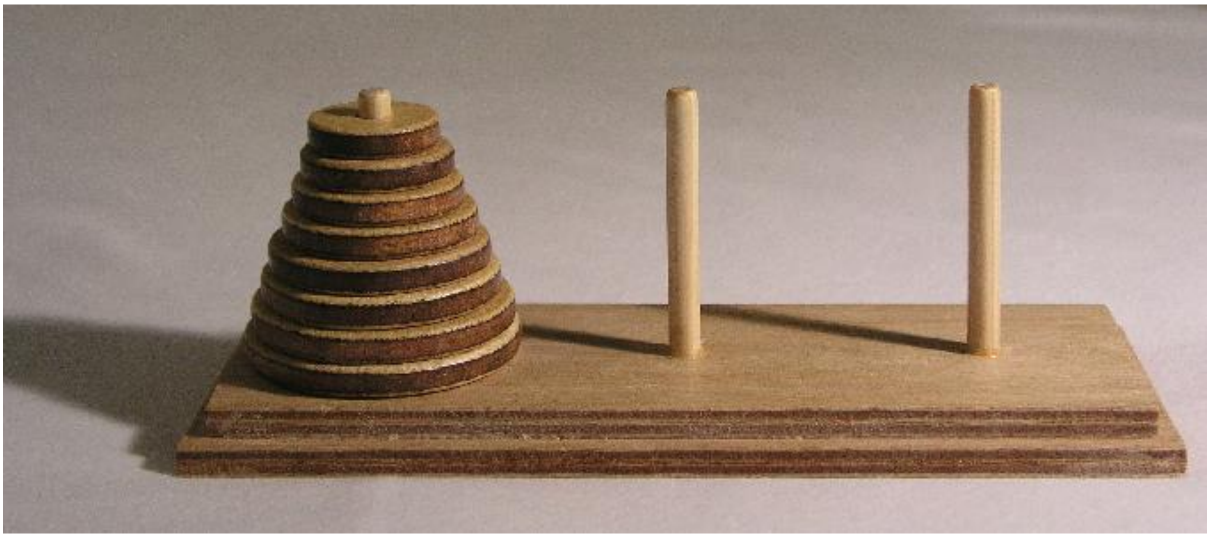
III) Applications du triangle de Sierpiński

A) Le jeu des tours de Hanoi

1) Description du jeu

Le jeu des tours de Hanoi est un problème mathématique inventé par le mathématicien français Edouard Lucas. Le jeu est composé de 3 supports et de disques de différents diamètres. L'objectif de ce jeu de réflexion est de passer en un minimum de mouvements d'une tour (tous les disques sur un des supports) à une autre en passant par un support intermédiaire. 3 règles régissent ce jeu:

- On ne peut déplacer qu'un seul disque à la fois.
- On doit déplacer un disque qui se trouve au sommet de l'un des trois supports.
- On ne peut pas placer un disque sur un disque qui a un diamètre inférieur.



Ici, un jeu des Tours de Hanoi avec 8 disques.

Le nombre de déplacements à effectuer au minimum pour résoudre ce jeu est de 2^{n-1}.

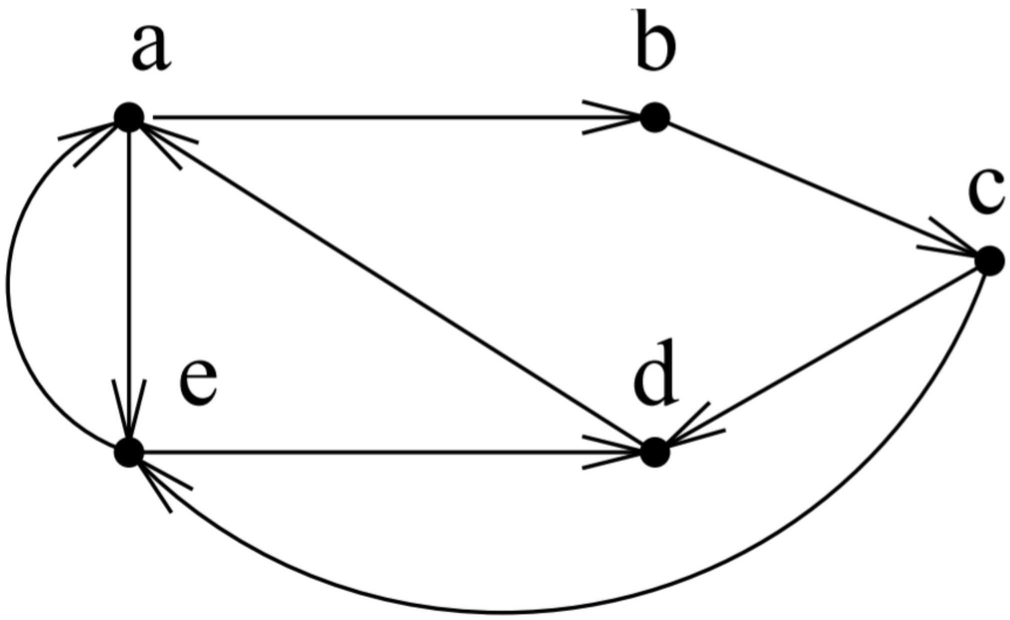
2) Lien avec le triangle de Sierpiński

a. Les graphes

Un graphe est un modèle d'un réseau reliant des objets. Les graphes sont composés de sommets et de liens qui permettent de relier les sommets.

S un ensemble de sommets
U un arc (orienté ou non)

Un arc est dit orienté si on ne peut le parcourir que dans un seul sens.



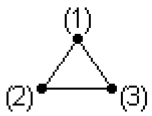
Le graphe ci-dessus est un graphe orienté. Il a 5 sommets (a, b, c, d et e) et 8 arcs. Tous les arcs sont orientés.

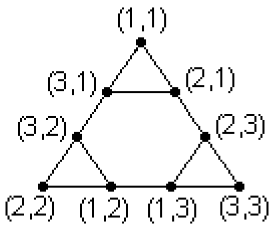
Les graphes sont utilisés dans de nombreux domaines comme les réseaux informatiques, les réseaux sociaux ou encore la génétique. Nous allons nous intéresser à l'application d'un graphe au jeu des tours de Hanoi.

b. Application au jeu des tours de Hanoi

Quand on représente sous forme de graphe le jeu des tours de Hanoi, c'est à dire l'ensemble des coups possibles dans le jeu, on obtient une représentation qui rappelle le triangle de Sierpiński.
Les sommets sont des états du jeu.
Les arcs sont les possibilités de passage entre deux états.
Le graphe représentant le jeu des tours de Hanoi est un graphe non orienté.

Par exemple, le schéma ci-dessous montre la représentation lorsque l'on a un disque (à gauche) ou deux (à droite) :

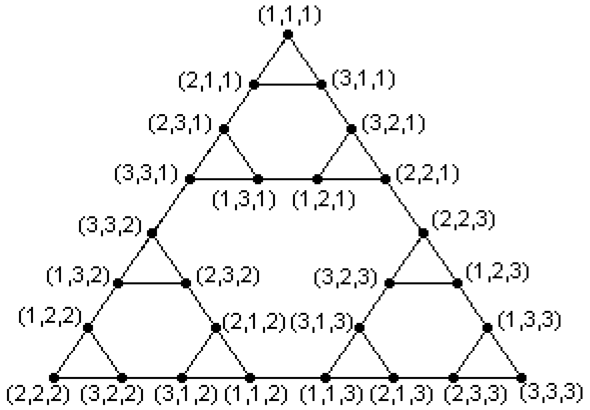




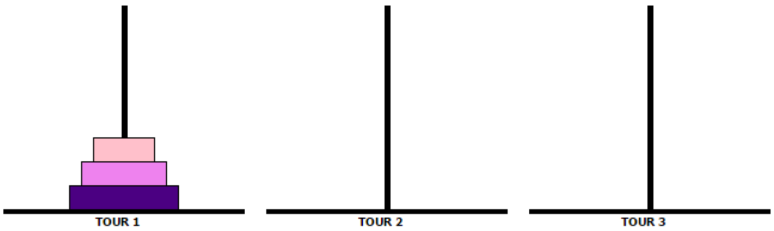
Lorsque le jeu ne contient qu'un seul disque, on n'a qu'un seul disque sur une des trois plateformes. La seule possibilité de jeu est de déplacer ce disque sur une des deux autres plateformes.

Les trois sommets du triangle extérieur représentent les situations où tous les disques sont placés sur le même support.
Par conséquent, le "chemin" qui nécessite le nombre minimal de coup pour résoudre ce jeu consiste à suivre les itérations proposées par le graphe en suivant le coté du triangle extérieur.

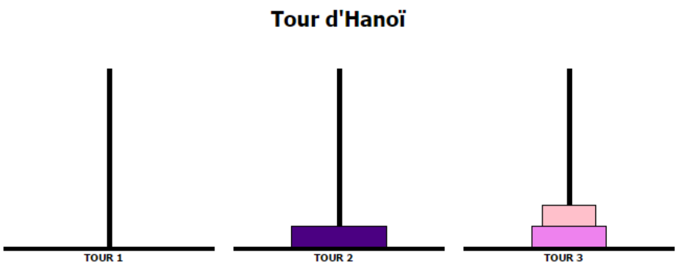
Ici la représentation avec 3 disques :



(1, 1,1) signifie que les 3 disques sont sur la tour 1.



(3, 3, 2) signifie qu'il y a deux disques sur la tour 3 et un disque sur la tour 2.



Comme le triangle est équilatéral, les trois sous triangles sont forcément congruents, c'est à dire qu'ils ont la même forme et la même taille, ils ont aussi le même angle que le triangle principal. Les trois sous triangles sont donc similaires au premier triangle à une échelle inférieure. On retrouve ici le principe d'auto similarité.

Nous avons observé la même chose pendant la construction des graphes pour le jeu des tours de Hanoi avec 1, 2 ou 3 disques qui sont chacun composé des graphes des jeux de taille inférieure. Donc, à l'aide du triangle de Sierpiński on peut déterminer le nombre de mouvements nécessaires pour gagner le jeu des tours de Hanoi pour n'importe quel nombre de disques.
Soit n le nombre de coups pour résoudre le nombre de coups à l'étape n :
f(n) = n
f(n+1) = 2 * n + 1
Cela est dû au fait que nous souhaitons seulement le nombre de coups minimal pour gagner, donc le chemin le plus court sur le graphe. Or le graphe de l'étape n+1, est composé de deux fois le graphe de l'étape n plus un mouvement. Ce dernier mouvement permet de déplacer le disque avec le plus grand diamètre de la tour 1 à la tour 3.

c. Relation entre le jeu des tours de Hanoi et le triangle de Pascal

On a vu précédemment qu'il était possible de construire le triangle de Sierpiński soit par itération, soit à l'aide des coefficients binomiaux du triangle de Pascal ou bien grâce à la représentation en graphe du jeu des tours de Hanoi.

On cherche donc à savoir, pour un nombre de disques n donné dans le jeu des tours de Hanoi, quel est l'ordre du triangle de Pascal pour lequel on obtient un triangle de Pascal à la même itération que le graphe des tours de Hanoi.

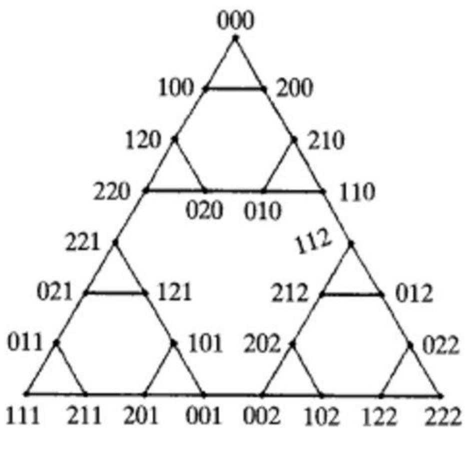


Figure 1

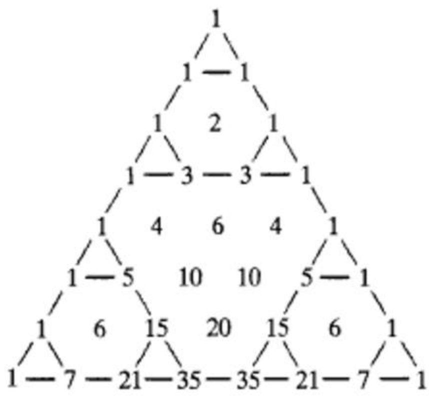


Figure 2

La figure 1 montre le graphe du jeu des Tours de Hanoi pour 3 disques. La figure 2 illustre le les coefficients binomiaux du triangle de Pascal d'ordre 8 où les coefficients binomiaux impairs sont reliés par un segment.

Pour tout N, le graphe des Tours de Hanoï à N disques est identique à celui obtenu à partir d'un Triangle de Pascal d'ordre 2^N, où l'on relie par une arête les coefficients binomiaux impairs.

Par exemple, les figures ci-dessus montrent le graphe du triangle de Hanoi avec 3 disques. Donc N = 3.
Le triangle de Pascal qui donne le même triangle de Sierpiński (troisième itération), est de rang 8.
Or: $2^N = 2^3 = 8$

B) Antennes fractales

1) Problème

Comment miniaturiser une antenne tout en gardant autant de longueur de réception, et donc d'efficacité de réception, que lorsque l'antenne est totalement dépliée ?

2) Définition

Une antenne fractale est une antenne qui utilise une conception fractale, auto-similaire pour maximiser la longueur ou augmenter le périmètre du matériau qui peut recevoir ou transmettre un rayonnement électromagnétique à l'intérieur d'une surface ou d'un volume donné.
Le terme antenne « fractale » est un abus de langage. Les antennes étudiées ont juste des formes pré-fractales : ce sont des itérations plus ou moins élevées alors que la forme fractale est le résultat d'une itération à l'infini.

1. Une antenne fractale

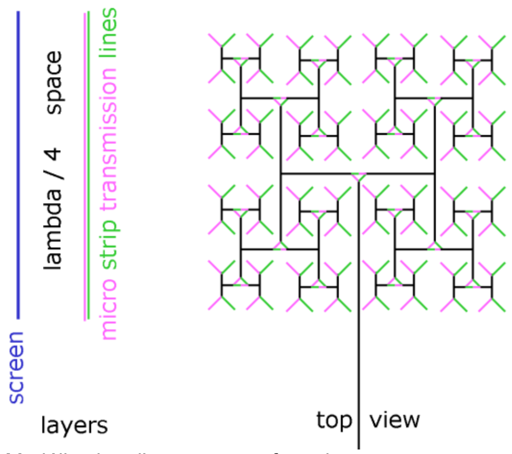
3) Conception d’une antenne fractale

Il suffit de fracturer l'antenne autant de fois que possible de façon fractale, c'est-à-dire en diminuant la longueur à chaque fractionnement.

Cette miniaturisation fut une première réussite pour les chercheurs qui travaillaient sur les antennes fractales. En effet, outre l'ergonomie et le gain considérable de place, on pouvait perfectionner les performances de l'antenne (tout simplement en ajoutant des branches et des ramifications).

Une nouvelle idée est alors apparue. Puisque les antennes fractales faisaient gagner de la place, pourquoi ne pas utiliser cette place pour mettre d'autres antennes ? C'est ainsi qu'est née une nouvelle génération d'antennes dites "multi bandes". Grâce aux technologies fractales, les antennes gagnaient en ergonomie, mais aussi en efficacité et en performance. Les antennes multi bandes sont des antennes qui produisent des signaux dans au moins deux bandes de fréquences, ces dernières pouvant être ajustées et accordées indépendamment les unes des autres.

Mieux, puisqu'il y a plusieurs antennes qui se côtoient en une "multi bande", on peut donc les régler chacune sur une fréquence d'onde différente. Ainsi, pour le même volume, un appareil peut gérer différentes sources d'informations simultanément.
Concernant le prix de conception, ces antennes sont très attractives, en effet, le fait que l’antenne ait une géométrie planaire fait que l’antenne est peu coûteuse et les matériaux utilisés sont abondants.



2.Modélisation d’une antenne fractale

4) Les acteurs des antennes fractales

Deux grandes sociétés produisent des antennes dite fractales: Fractus et Fractal Antenna System Inc. ont été lancées dans le seul but de commercialiser des antennes fractales pour l'industrie, le business, le commerce, l'automobile, la téléphonie, les communications, l'armée...

Fractus est un pionnier dans le développement des antennes internes pour les smartphones, tablettes et Internet sans fil des appareils Things. La société détient un portefeuille intellectuel des droits de propriété de plus de 40 inventions protégées par plus de 120 brevets et demandes de brevets aux États-Unis, en Europe et en Asie.

Conclusion

Le triangle de Sierpiński est une fractale qui a de nombreuses applications. Nous avons pu étudier les différentes façons de construire ce triangle et ainsi analyser les propriétés mathématiques lié à cette fractale. De plus, nous avons pu travailler sur l'utilisation du triangle de Sierpiński avec l'exemple des tours de Hanoï ainsi que les antennes fractales. qui permettent de voir une utilité pratique au triangle de Sierpiński. Une autre utilité des fractales a été trouvée avec la compression fractale: une nouvelle méthode basée sur la compression d'images avec la récurrence de motifs qui permet de minimiser le poids des images.

Ce TFE nous as permis de découvrir les fractales et leurs propriétés. Nous avons pu découvrir que le triangle de Sierpiński avait des liens avec des théorèmes mathématiques comme le théorème de Lucas mais aussi des jeux et objets mathématiques comme le triangle de Pascal ou le jeu des tours de Hanoi.

Sources

http://paulbourke.net/fractals/gasket/ (tapis de Sierpiński)

http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Iteration/TrgPascF.htm (Triangle de Pascal et théorème de Lucas)

http://gradj.com/2012/05/17/fractal-triangle-de-pascal-triangle-de-sierpinski/(triangle de pascal et modulo)

http://mathforum.org/mathimages/index.php/Sierpinski's_Triangle (théorie du chaos)

http://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Lucas%27_Theorem (preuve du théorème de Lucas en anglais)

http://blog.kleinproject.org/?p=479&lang=fr (définition, aire triangle et dimension fractale)

https://www.youtube.com/watch?v=klaTVO7u5-M (minute 33 à propos des probabilités, tapis de Sierpiński aléatoire)

https://fr.wikipedia.org/wiki/Jeu_du_chaos (théorie du chaos)

http://geoffreyhistoire.pagesperso-orange.fr/fractales/place.html : (Comprendre antenne fractale et compression fractale)

https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00347683/document : (Antenne fractale Sierpiński)

http://www.fractus.com/about/?slide=1 : (Acteurs des antennes fractales)

http://www.fractenna.com/our/our.html : (Acteurs des antennes fractales)

http://webfractales.free.fr/site_fractale/fichier/FracTalCompressions.pdf : (Compression fractale)

http://ethesis.inp-toulouse.fr/archive/00000461/01/gaha.pdf : (Thèse antenne fractale)

http://www.cut-the-knot.org/triangle/Hanoi.shtml **: (**Tour de Hanoi et triangle de Sierpiński)