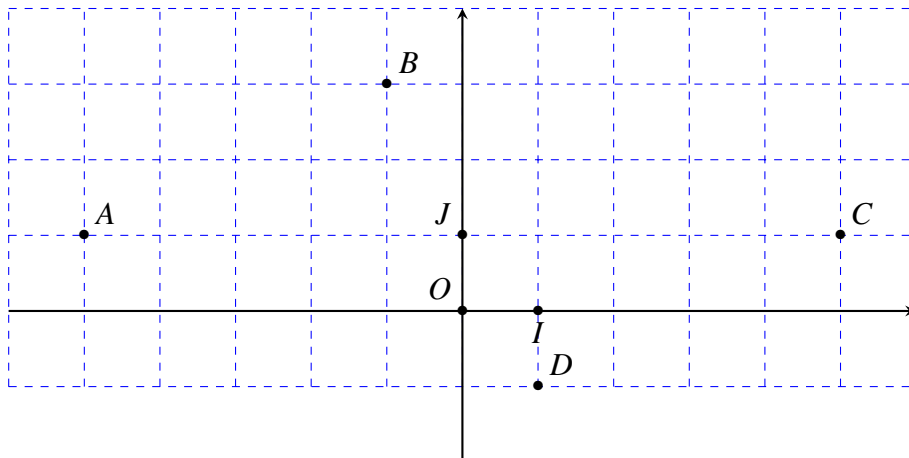


Exercice 1 (coordonnées d'un vecteur).

Dans un repère, on considère les points $A(-5; 1)$, $B(-1; 3)$, $C(5; 1)$ et $D(1; -1)$.

a) Placer les points A , B , C et D .



b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier.

Déterminons les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DC} :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 - (-5) \\ 3 - 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs ont les mêmes coordonnées, ils sont donc égaux : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

On en déduit que $ABCD$ est un parallélogramme.

c) Quelles sont les coordonnées des **milieux des** diagonales $[AC]$ et $[BD]$?

D'après ce qui précède, $ABCD$ est un parallélogramme donc les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu. Calculons ses coordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right) \text{ soit } (0; 1)$$

Exercice 2.

Soit les points $A(1; 5)$, $B(3; 8)$, $C(9; 17)$ et $D(17; 32)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC}

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 8 - 5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 9 - 1 \\ 17 - 5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.

On remarque que $2 \times 4 = 8$ et $3 \times 4 = 12$.

On a donc : $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$

Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont donc colinéaires.

3. Les points A , B et D sont-ils alignés ? Justifier.

On sait que Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires, les droites (AB) et (AC) sont donc parallèles et les points A , B et C sont donc alignés.

Exercice 3.

On considère les points $A(4; -4)$, $B(4, 4)$ et $S(8; 0)$

1. Calculer les coordonnées des points P et R définis par :

$$\overrightarrow{BP} = \frac{5}{8}\overrightarrow{OB} \text{ et } \overrightarrow{OR} = \frac{21}{8}\overrightarrow{OA}$$

- Calculons les coordonnées du vecteur $\frac{5}{8}\overrightarrow{OB}$:

$$\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} x_B - x_O \\ y_B - y_O \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{5}{8}\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} \frac{5}{8} \times 4 \\ \frac{5}{8} \times 4 \end{pmatrix} \text{ d'où } \boxed{\frac{5}{8}\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}}$$

- Calculons les coordonnées du vecteur \overrightarrow{BP} en fonction de x_P et y_P :

$$\overrightarrow{BP} \begin{pmatrix} x_P - x_B \\ y_P - y_B \end{pmatrix} \text{ soit } \boxed{\overrightarrow{BP} \begin{pmatrix} x_P - 4 \\ y_P - 4 \end{pmatrix}}$$

- On sait que $\overrightarrow{BP} = \frac{5}{8}\overrightarrow{OB}$, les coordonnées de ces vecteurs sont donc égales :

$$\begin{cases} x_P - 4 = \frac{5}{2} \\ y_P - 4 = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ d'où : } \begin{cases} x_P = 4 + \frac{5}{2} = \frac{13}{2} = 6,5 \\ y_P = 4 + \frac{5}{2} = \frac{13}{2} = 6,5 \end{cases}$$

d'où : $P(6,5; 6,5)$

- De même pour le point R :

$$\frac{21}{8}\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} \frac{21}{8} \times 4 \\ \frac{21}{8} \times -4 \end{pmatrix} \text{ soit } \frac{21}{8}\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} \frac{21}{2} \\ -\frac{21}{2} \end{pmatrix}$$

On trouve : $R(10,5; -10,5)$

2. Le point S est-il sur la droite (PR) ? Justifier.

Déterminons les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{PS} et \overrightarrow{PR} :

$$\overrightarrow{PS} \begin{pmatrix} x_S - x_P \\ y_S - y_P \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{PS} \begin{pmatrix} 8 - 6,5 \\ 0 - 6,5 \end{pmatrix} \text{ et } \boxed{\overrightarrow{PS} \begin{pmatrix} 1,5 \\ -6,5 \end{pmatrix}}$$

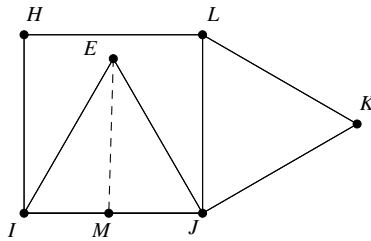
$$\overrightarrow{PR} \begin{pmatrix} x_R - x_P \\ y_R - y_P \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{PR} \begin{pmatrix} 10,5 - 6,5 \\ -10,5 - 6,5 \end{pmatrix} \text{ et } \boxed{\overrightarrow{PR} \begin{pmatrix} 4 \\ -17 \end{pmatrix}}$$

Ces vecteurs sont-ils colinéaires ? Comparons les produits en croix :

$$xy' = 1,5 \times (-17) = -25,5 \text{ et } x'y = 4 \times (-6,5) = -26$$

Les produits en croix ne sont pas égaux, donc les vecteurs \overrightarrow{PS} et \overrightarrow{PR} ne sont pas colinéaires.

On en déduit que les points P , R et S ne sont pas alignés, ce qui signifie que S n'est pas sur la droite (PR) .

Exercice 4 (Avec prises d'initiatives).

Le quadrilatère IJLH est un carré de côté 1.

Les triangles IJE et JKL sont équilatéraux.

Que vaut la longueur EK ?

H, E et K sont-ils alignés ?

Correction

Une méthode possible : en introduisant le repère orthonormé (I, J, H) .

On détermine les coordonnées de chacun des points de la figure.

On obtient immédiatement : $I(0; 0)$, $J(1; 0)$, $H(0; 1)$ et $L(1; 1)$

Coordonnées du point E :

Dans le triangle EIJ , soit M le milieu du côté $[IJ]$.

Le triangle étant équilatéral, $[EM]$ est à la fois médiane et hauteur.

On en déduit que IM est l'abscisse du point E et ME son ordonnée.

On sait que $IM = 0,5$. Il faut déterminer EM .

Or, le triangle EMI est rectangle en I , donc d'après l'énoncé de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} EI^2 &= IM^2 + ME^2 \\ 1^2 &= (1/2)^2 + ME^2 \\ 1 &= \frac{1}{4} + ME^2 \\ \text{donc } ME^2 &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

On en déduit que $ME = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

conclusion : $E\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

De même, on montre que l'on a : $K\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Le repère est orthonormé, on peut donc utiliser la formule donnant la longueur d'un segment :

$$EK = \sqrt{(x_K - x_E)^2 + (y_K - y_E)^2} = \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

Alignement : Méthode (à vous de terminer cette partie).

On étudie la colinéarité (par exemple) des vecteurs \overrightarrow{HE} et \overrightarrow{HK}