Deuxième partie

2 Théorème de Bernstein

2.1

Le but de ce problème est de prouver qu'étant donnés deux ensembles E et F, s'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection de E dans F.

2.2 Notations

Soient E et F deux ensembles.
Soient i une injection de E dans F et j une injection de F dans E.
On note
- $A_0 = E \setminus j_*(F)$
- $A_1 = (j \circ i)_*(A_0)$,
- $\vdots$
- $A_{n+1} = (j \circ i)_*(A_n)$, pour n dans $\mathbb{N}$.

Nous avons ainsi défini ainsi une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E.
On note enfin $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $C = E \setminus B$.

2.3 Construction d'une application

2.3.1 Construction

1. Soit x dans C. Montrer qu'il existe un unique élément z de F tel que $j(z) = x$, que l'on peut alors noter $\phi(x)$.
2. Soit x dans B. On notera $\phi(x) = i(x)$.
3. Montrez que nous avons ainsi créé une application ϕ de E dans F.

2.3.2 Injectivité de ϕ

1. Montrer que les restrictions de ϕ à C et B sont injectives.
2. Considérons maintenant x dans C et y dans B tels que $\phi(x) = \phi(y)$. Montrer que $x = (j \circ i)(y)$ et qu'il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que y soit dans A_n.
3. En déduire que ϕ est injective.

2.3.3 Surjectivité de ϕ

1. Soit z dans F. Montrer que si $j(z)$ est dans B ou dans C, alors z est dans $\Im(\phi)$.

2.3.4 Conclure

3 Illustration

$E = \mathbb{N}$,$F = [2, +\infty]$, $i = n \mapsto n + 4$, $j = n \mapsto n$.

Illustrer la preuve du théorème avec ces paramètres : déterminer précisément A_0, A_1 ,. . . ,A_n ,B ,C et ϕ.