# Cour de Dynamiquedes structures

Mes 15 - 10 - 2011 -

1 - Objectif de la dynamique des structures -

- Le but de dynamique des structures est d'étudier une structure soumis a une charge dynamique afin d'assurer sa résistance et sa stabilité contre ce type de charge :

1 - Vérifier sa résistance : en comparant la charge (contrainte) appliqué à la contrainte adm ($\sigma_{adm}$)

2 - Vérifier sa stabilité : en comparant la flèche apliqué à la flèche adm ($f_{adm}$)

- Il existe deux approches differentes pour l'évaluation de la réponce d'une structure à des forces variables temporellement :

* Une approche déterministe : c'est faire une analyse pour déterminer les charges dynamique exterieur

* Une approche probabiliste : Cette analyse est utilisé dans des structures de grandes importance, par escemple : centrale nucléaire,

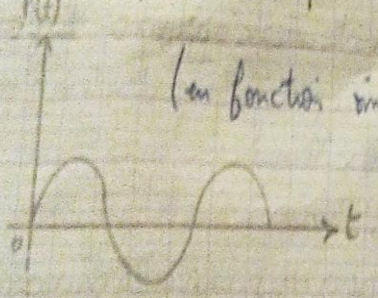
- Cette analyse est aussi appelé une analyse statique, elle consiste a prendre des précaution c-à-d prévoir le pire (exemple : Etudier le seysme max qui a pu frapper une zone est construire une structure qui peut résisté a ce dernier

2. Types de sollicitations déterminées :

- n'importe quelle structure subit un changement dynamique sous une forme ou une autre.
- D'un point de vue analytique il y'a deux catégories :

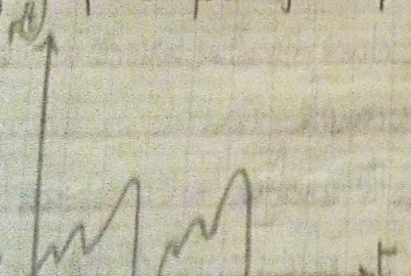
2.1. Sollicitations de type périodique : sont constituées de charges répétitives qui conservent la même évolution dans le temps sur un grand nombre de cycles (se reppet dans des intervalles de temps identique)

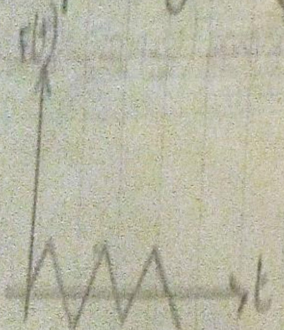
2.1.1. Changement périodique harmonique simple :




(en fonction sin ou cos)

2.1.2. Changement periodique de forme quelconque :

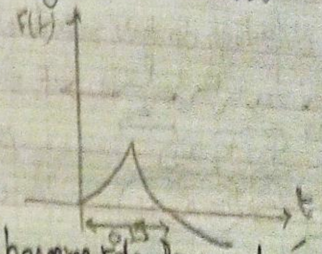



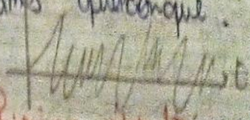

2.2. Sollicitation de type apériodique (non périodique) : sont soit des impulsions de courte durée, soit des chargements de longue durée et de forme quelconque, est auquel de par rapport aux dégat causé on peut savoir quel types de chargements est appliqué.

2.2.1. Chargement de courte durée :

appelé comme ça a cause de sa courte durée (exp: 0,1s) est des des dégat mineurs causés.




2.2.2. Chargement de longue durée : même ça se pas dans un petit lapse de temps les degat causé sont énorme est il sans de forme quelconque.




Un model physique vibratoire qui le caractérisme :

1. Une masse (m)
2. un Ressort (k) → absorbe le choque } simple

Remarque : si il y'a pas de ressort = pas de frotement = ne s'arret pas.

3. Amortisseur (c) (frottement) } complexe

absorbe les vibration

frottement microscopique (exp : entre les particules)

frottement macroscopique (exp : entre un poteau et une poutre).

3 déplacement, et 3 rotations dans les sens $x$, $y$

cof de force

Lun 20. 10.2014. Détermination des régidité : $F(t) = K \cdot 1$

**La régidité K** : c'est une force élastique qui produit un déplacement unitaire.

**application** : déterminer les régidité equivalent des systemes suivant :

a) Montage de 2 ressort en série

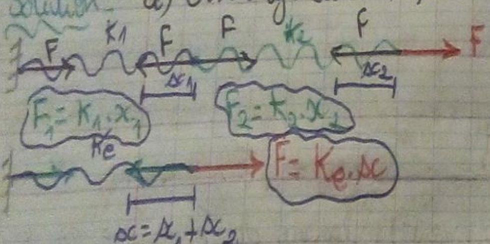
b) " " " " en //

c) " mixte de 3 ressort

d) une poutre simplement appuis soumis a une force au milieu.

e). Portique sur deux poteaux l'un bien encastré, l'autre encastré-articulé.

**Solution :** a) Montage de deux ressort :




$F_1 = K_1 \cdot x_1$ $\quad$ $F_2 = K_2 \cdot x_2$ $\quad$ $F = K_e \cdot x$

$x = x_1 + x_2$

$F_1$, $F_2$ et $F_3$ sont la force de rappelle

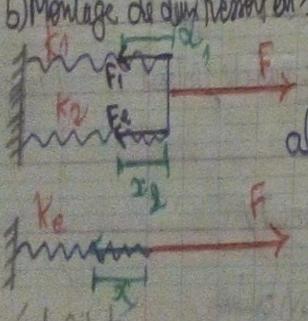
on remarque que $F = F_1 = F_2$ et : $F = K_e \cdot x \Rightarrow x = F/K_e$

, $F_1 = K_1 x_1 \Rightarrow x_1 = F_1/K_1$ et $F_2 = K_2 x_2 \Rightarrow x_2 = F_2/K_2$

et comme : $F = F_1 = F_2$ et $x = x_1 + x_2$ alors : $\frac{F}{K_e} = \frac{F_1}{K_1} + \frac{F_2}{K_2}$

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \Rightarrow K_e = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

b) Montage de deux ressort en // :




On a : $x = x_1 = x_2$

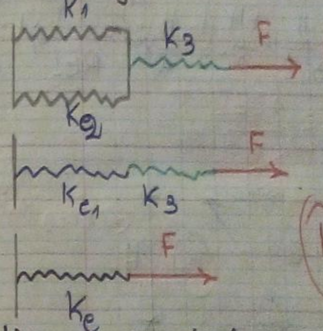
et $F = F_1 + F_2$

alors $F = K_e x = K_1 x_1 + K_2 x_2$

d'où $K_e = K_1 + K_2$

Degré de liberté : movement possible dans l'espace, est chaque point contien 6 degré de liberté.

c) Montages mixe de 3 ressorts :



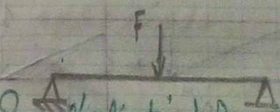

$K_{e_1} = K_1 + K_2$

$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_{e_1}} + \frac{1}{K_3} \Rightarrow K_e = \frac{K_{e_1} K_3}{K_{e_1} + K_3}$

$$K_e = \frac{(K_1 + K_2) K_3}{K_1 + K_2 + K_3}$$

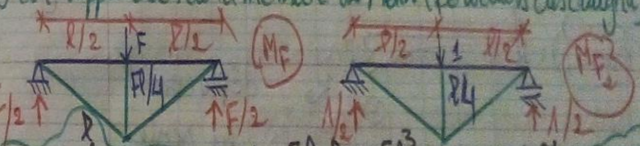
d) une poutre simplement appuis soumise a une force F au millieu :

se qui jeu le rôle du ressort : Verticalement ⇒ les poutres ; Horizontalement ⇒ poteaux




$\Delta = f(F) \rightarrow K = ?$

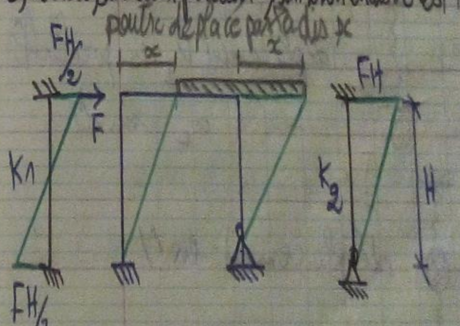
Par l'application de la méthode de Mohr (produits des diagrammes)




$$\Delta = \frac{1}{EI}\int_0^l M_1 M_2 \, dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{Fl}{4} \cdot \frac{l}{4} \cdot l = \frac{Fl^3}{48EI} \Rightarrow \Delta = 1 = \frac{Kl^3}{48EI} \Rightarrow K = \frac{48EI}{l^3}$$

e) Portico sur deux poteaux l'un bien encastré est l'autre encastré-articulé

poutre déplace par la dis $x$




poutaux aux // : $x = x_1 = x_2$ } déplacement

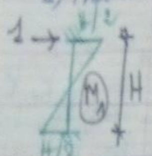
" aux série (mixte) : $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \neq x_2$

isostatique nbr inconnue = nbr équation

hyperstatique " $\neq$ "

$\Delta = \nabla$

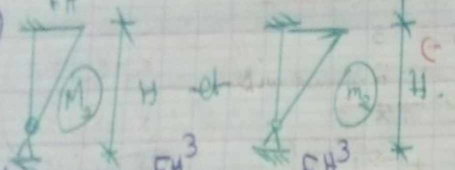
1) Théorème de Mohr :



$$\Delta_1'^3 = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{FH}{2} \cdot \frac{H}{2} \cdot \frac{H}{2} \times 3 = \frac{FH^3}{12EI} \Rightarrow 1 = \frac{FH^3}{12EI}$$

$$\Rightarrow K = \frac{12EI}{H^3}$$

2)

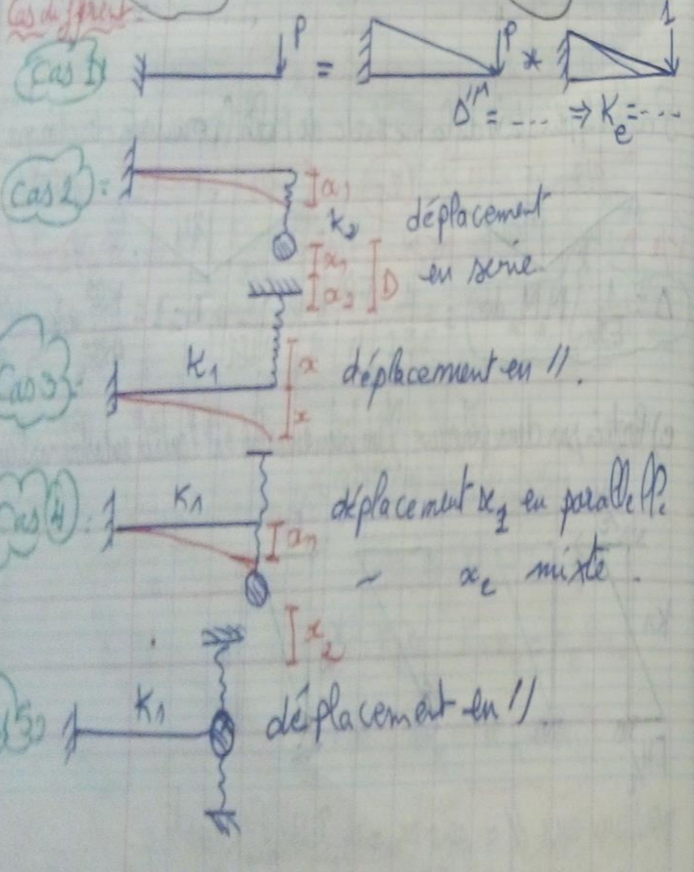


← théo Mohr

$$\Delta'^1 = \frac{1}{3E} FH.H.H = \frac{FH^3}{3EI} \Rightarrow 1 = \frac{FH^3}{3EI}$$

$$K_2 = \frac{3EI}{H^3} \Rightarrow K_e = K_1 + K_2 = \frac{15EI}{H^3}$$

Cas différent



Cas 1 : $\Delta'^M = \dots \Rightarrow K_e = \dots$

Cas 2 : déplacement en série

Cas 3 : déplacement en //.

Cas 4 : déplacement $x_1$ en parallèle ; $x_2$ mixte.

Cas 5 : déplacement en //

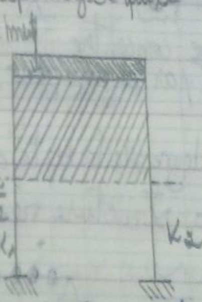
degré de liberté = mouvement dans l'espace.

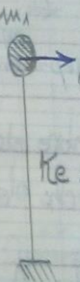
Mer 22.10.2014

## Chapitre 01 :

## Détermination de la réponse d'un système d'un seul degré de liberté.

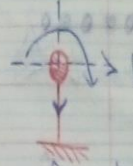
plancher est un corps régide qui se déplace horizontalement est qui est caractériser par un seul degré de liberté





déplacement horizontale.

$K_e = K_1 + K_2$
$(K_1 // K_2)$



Il a trois degré de librerté :

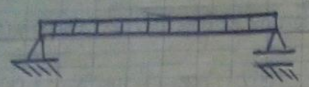
- Dans la modelisation il y a deux types de Modeles :

1) Modele à paramètre discrets : En l'utilise quand on construit une structure simple (exp : Maison simple ... etc)

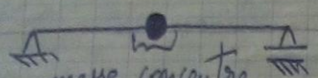
2) Modele à paramètre continue : En l'utilise pour une structure de grand importance (exp : Central nucléaire, hopitale, structure a forme complexe ... etc)

- La méthode a parametre continue se rapproche de la solution exacte plusque la méthode a paramètre discréts modélisation : modèle de Calcul = de types 1 et 2

⇒ modélisation = model physique.

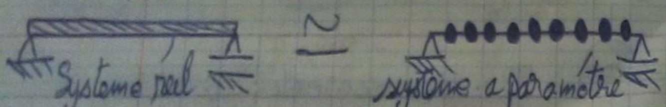


modélisation a paramètre discré :



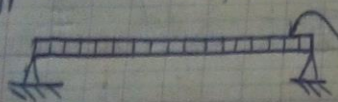
masse concentre
(represente par un seul point)

* Plusque le nbre de degre de liberté augmente plus on se rapproche de la structure réel :



Systeme réel ≃ système a paramètre discrète.

* Puisque le nbr des élément finie augmente, plus on se rapproche de la solution exacte.



élément finie

Planché : est un corps régide qui se déplace horizontalement est qui est caracterisée par un seul degré de liberté.

Mer 29.10.2014

Vibration Libre des systemes a un seul degré de liberté :

$m\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=0 \Rightarrow x(t)=?$

La solution de l'equation differentielle de seconde ordre $m\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=0$ et alors : $x(t)=Ge^{rt}$

- En substituant (1), (2) et (3) dans l'equation

$x(t)=Ge^{rt}$ ---- (1)

$\dot{x}(t)=Gr.e^{rt}$ --- (2)

$\ddot{x}(t)=Gr^2e^{rt}$ --- (3)

on obtient :

$(mr^2+Cr+k)Ge^{rt}=0$

on a $mr^2+Cr+K=0$ et $Ge^{rt}\neq 0$

on divise par $m$ :

$\frac{mr^2}{m}+\frac{Cr}{m}+\frac{k}{m}=0$ / avec $\omega^2=\frac{K}{m}$

donc : $r^2+\frac{C}{m}r+\omega^2=0$ / avec $b=\frac{c}{m}$

La periode T : c'est le temps d'un cycle

La vélocité : c'est le nbr de cycle par seconde
(pulsation propre du cycle)

⇒ $r^2+\frac{c}{m}r+\omega^2=0$ → Equation caracteristique

$r=?$

$\Delta=b^2-4ac=\left(\frac{c}{m}\right)^2-4\omega^2$ → $\Delta>0$, $\Delta=0$, $\Delta<0$

## Oscillation libre non amortie $(c \neq 0) = 0$

$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

si $C = 0$ dans $r^2 + \frac{c}{m} r + \omega^2 = 0$ on obtien $\boxed{r^2 + \omega^2 = 0}$

$$\Rightarrow r^2 = -\omega^2 \Rightarrow r^2 = i^2 \omega^2 \text{ avec } i^2 = -1$$

(nbr complexe)

racine $r = \pm \omega i$ $\begin{cases} r_1 = +\omega i \\ r_2 = -\omega i \end{cases}$

on remplace $r_1$ et $r_2$ dans l'équation du solution :

$$\Rightarrow x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

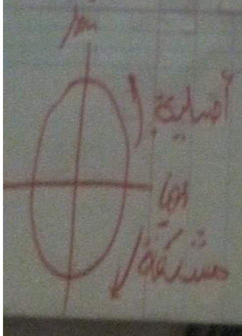
$$\boxed{x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}}$$

Par l'equation Euler

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$$

donc $\Rightarrow X(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$.

$$\begin{cases} x(0) = B \text{ (avec } \sin 0 = 0 \text{ et } \cos 0 = 1) \\ \dot{x}(t) = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t \\ \dot{x}(0) = A\omega = \dot{X}_0 \end{cases}$$




cos est en avance par | à sin

$$A = \frac{\dot{X}_0}{\omega} \Rightarrow \cancel{x(t) = C}$$

La solution est:

$$\boxed{X(t) = \frac{\dot{X}_0}{\omega} \sin \omega t + \overset{\text{coef}}{X_0} \cos \overset{\text{angle}}{\omega t}}$$

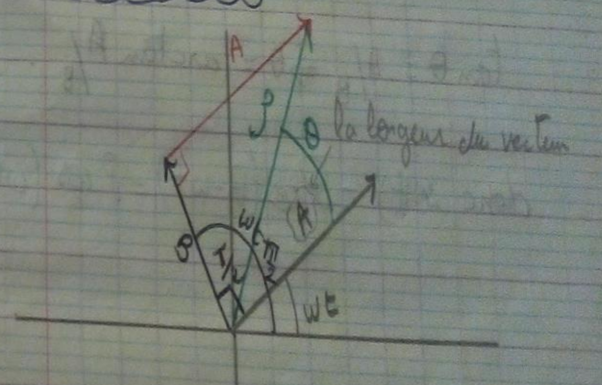
$\Rightarrow$ Sg Equation harmonique.

on cherche a transformé $X(t)$ en fonction de sin

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \omega t \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{0} + \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{1} \cos \omega t$$

$$\boxed{\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \omega t}$$

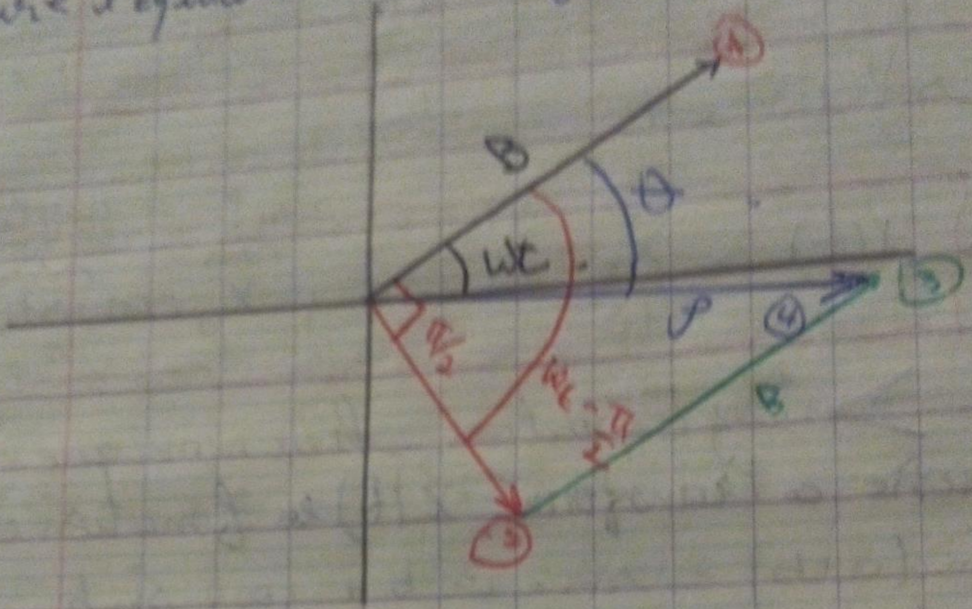



$$\rho = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\tan \theta = \frac{B}{A} \Rightarrow \theta = \arctan$$

donc : $X(t) = \rho \sin(\omega t + \theta)$

écrire l'equation X(t) en fonction de cos




$\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) =$

$\tan\theta = A/B \Rightarrow \theta = \arctan A/B$

donc $x(t) = \rho\cos(\theta - \omega t) = \rho\cos(\omega t - \theta)$

Chapitre II

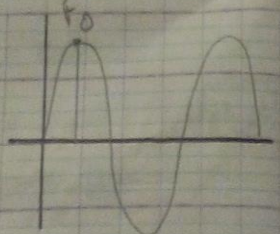
## Détermination de la réponse d'un système dynamique soumi à une excitation harmonique

Charge dynamique
- périodique
  - harmonique simple (en fonction de sin ou cos)
  - forme quelconque
- non périodique
  - de courte durée
  - de longue durée

. harmonique simple : $F_0 \sin \alpha t$ .

$F_0$ : Amplitude de l'excitation

$\alpha$ : pulsation de l'excitation (nbr de cycle par 1s)




- Equation de mouvement :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \sin \alpha t$$

. La solution de l'équation est :

$$x(t) = \underbrace{x_h(t)}_{\text{Solution homogène}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{solution particulière}}$$

* Solution homogène ($x_h$) : La solution de l'équation homogène sans seconde membre (représente la réponse d'un système libre) solution dans chap 2

* Solution particulière ($x_p$) :

- dépend de la forme de la force d'excitation.

I) $\frac{m\ddot{x}}{m} + \frac{c\dot{x}}{m} + \frac{Kx}{m} = \frac{F_0}{m} \sin \alpha t$ .

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \alpha t .$$

avec $\xi = \frac{c}{2m\omega} \Rightarrow c/m = 2\xi\omega$ .

et $\frac{K}{m} = \omega$ .

I) Système forcé non amorti $c=0$ .

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \alpha t \;\dots (*)$$

on a $\underbrace{x_G(t)}_{\text{Solution générale}} = \underbrace{x_h(t)}_{\text{Solution harmonique}} + x_p(t)$ ← Solution particulière

$$\boxed{x_h(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t}$$ pour cas non amorti ($c=0$)

$$\boxed{x_p(t) = G_1 \sin \alpha t + G_2 \cos \alpha t} \;\dots (1)$$

$$\dot{x}_p(t) = G_1 \alpha \cos \alpha t - G_2 \alpha \sin \alpha t \;\dots (2)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -G_1 \alpha^2 \sin \alpha t - G_2 \alpha^2 \cos \alpha t \;\dots (3)$$

18 Janvier

On remplace (1) et (2) et (3) dans l'équation du mouvement (*), on obtient :

$$(-G_1\alpha^2+\omega^2 G_1)\sin\alpha t+(-G_2\alpha^2+G_2\omega^2)\cos\alpha t=\frac{F_0}{m}\sin\alpha t+0\cos\alpha t$$

$$\Rightarrow\begin{cases} G_1(\underbrace{\omega^2-\alpha^2}_{\neq 0})=\frac{F_0}{m} \Rightarrow G_1=\frac{F_0}{m(\omega^2-\alpha^2)} \\ G_2(\underbrace{\omega^2-\alpha^2}_{\neq 0})=0 \Rightarrow G_2=0 \end{cases}$$

$r=\frac{\alpha}{\omega}$ : Rapport des pulsations :

on a $G_1=\frac{F_0}{m\omega^2\left(1-\frac{\alpha^2}{\omega^2}\right)}=\frac{F_0}{m\omega^2(1-r^2)}$

on a $\omega^2=\frac{k}{m} \Rightarrow k=m\omega^2$.

d'où $\boxed{G_1=\frac{F_0}{k(1-r^2)}} \Rightarrow \boxed{x_p(t)=\frac{F_0}{k}\cdot\frac{1}{1-r^2}\sin\alpha t}$

$$x(t)=\boxed{A\sin\omega t+B\cos\omega t+\frac{F_0}{k}\cdot\frac{1}{1-r^2}\sin\alpha t}$$

Mercredi 18.11.2014.

## II) - Système forcé amorti : ($c\neq 0$)

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\sin\alpha t.$$

Divisé par m : $\ddot{x}+2\xi\omega\dot{x}+\omega^2 x=\frac{F_0}{m}\sin\alpha t$ ... (*)

on a $x(t)=x_h(t)+x_p(t)$

solution générale ; solution harmonique ; solution particulière.

$$\boxed{x_h(t)=e^{-\xi\omega t}(A\sin\omega_0 t+B\cos\omega_0 t)}$$ pour cas amortie $c\neq 0$

$$\boxed{x_p(t)=G_1\sin\alpha t+G_2\cos\alpha t} \quad ....(1)$$

$$\dot{x}_p(t)=G_1\alpha\cos\alpha t-G_2\alpha\sin\alpha t \quad ....(2)$$

$$\ddot{x}_p(t)=-G_1\alpha^2\sin\alpha t-G_2\alpha^2\cos\alpha t \quad ....(3)$$

On remplace (1), (2) et (3) dans l'équation (*) :

$$(-G_1\alpha^2-2G_2\alpha\xi\omega+G_1\omega^2)\sin\alpha t+(-G_2\alpha^2+2G_1\alpha\xi\omega+G_2\omega^2)\cos\alpha t=\frac{F_0}{m}\sin\alpha t+0\cos\alpha t$$

$$\begin{cases} G_1(\omega^2-\alpha^2)-2G_2\alpha\xi\omega=\frac{F_0}{m} \\ 2G_1\alpha\xi\omega+G_2(\omega^2-\alpha^2)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} G_1=\frac{F_0}{k}\cdot\frac{1-r^2}{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2} \\ G_2=\frac{F_0}{k}\cdot\frac{-2\xi r}{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2} \end{cases}$$

$r = \frac{\alpha}{\omega}$ rapport des pulsations.

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \left[ (1-r^2)\sin\alpha t - 2\xi r \cos\alpha t \right]$$

$$= \frac{F_0}{k} \frac{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \cos(\alpha t - \theta)$$

$$\boxed{x_p(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \cos(\alpha t - \theta)}$$

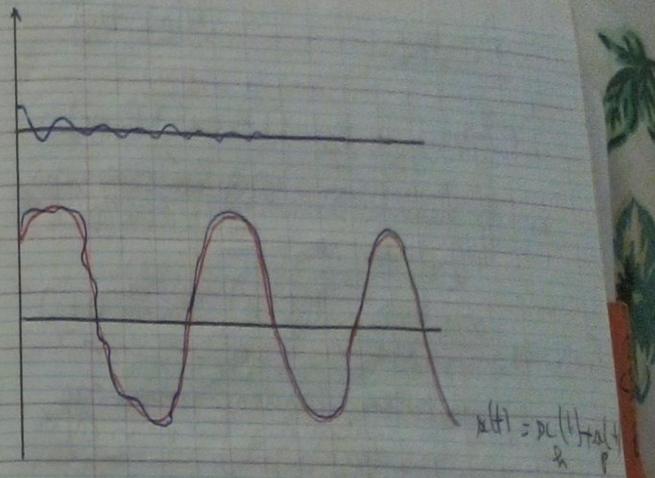
d'où :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

$$\boxed{x(t) = \underbrace{e^{-\xi\omega t}(A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t)}_{x_h :} + \underbrace{\frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \cos(\alpha t - \theta)}_{x_p}}$$

phase transitoire
régime transitoire
=
négligé après certain
nbr de cycle

$x_p$
régime forme




* $x_h <<< x_p$
* $x_h$ va disparaitre aprés un certain nbr de cycles
* Pour éviter toute complication mathématique, pour déterminer A, B

$$\boxed{x(t) = x_p(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \cos(\alpha t - \theta)}$$

avec :

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{k} D \cos(\alpha t - \theta)}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$ facteur d'amplification dynamique.

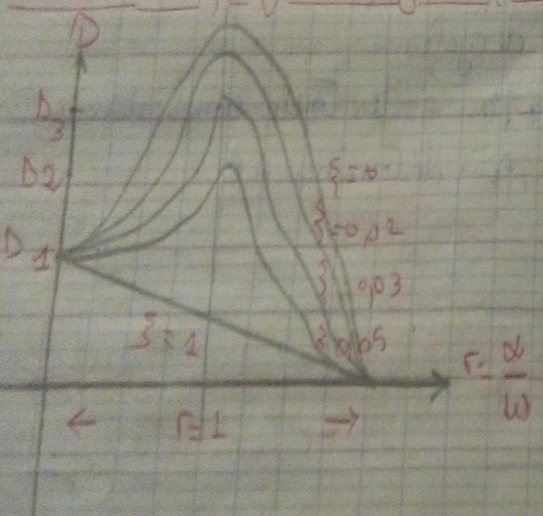
Remarque :


$x = \frac{F_0}{k}$ (Force ($F_0$) charge) considéré comme cas statique $D = 1$)

$x = \frac{F_0}{k} D \cos(\alpha t - \theta)$ (avec $D \neq 1$)

(Force considéré comme cas dynamique).

Facteur d'amplification dynamique D :




$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = f(\xi)$$

Cas possible :

Cas ①

• $r \rightsquigarrow 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\omega} \rightsquigarrow 0 \Rightarrow (\omega \gg \alpha)$

$\Rightarrow \boxed{D \rightsquigarrow 1}$ * Le système considéré comme cas statique.

Cas ②

$r \rightsquigarrow \infty \Rightarrow \frac{\alpha}{\omega} \rightsquigarrow 0 \Rightarrow (\omega \ll \alpha)$

$\Rightarrow \boxed{D \rightsquigarrow 1}$ * Le système est stable

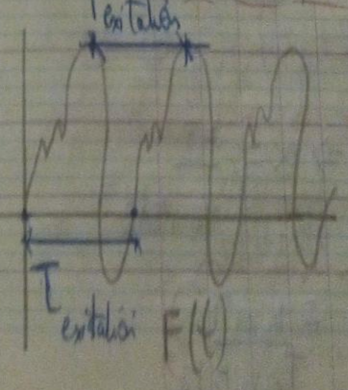
Cas ③

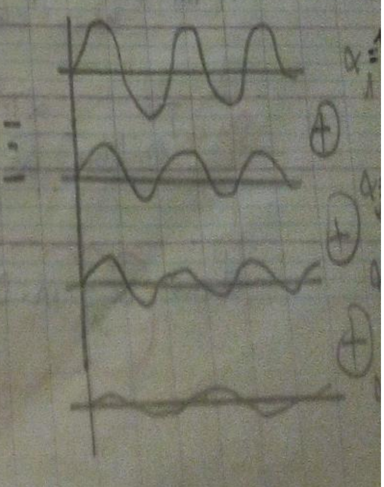
$r = 1 \Rightarrow \alpha = \omega \Rightarrow \boxed{D_{max} = \frac{1}{2\xi}}$

cas de raisonnance (Cas dangereux)

# Chapitre 3 :

## Détermination de la réponse d'un système dynamique soumis à une excitation périodique de forme quelconque :



$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\alpha_n t + b_n \sin\alpha_n t\right)$$

Systeme non amorti $\xi = 0$

$$F_0 = a_0 \rightarrow x_0 = \frac{a_n}{K}$$

$$F_1 = a_n \cos\alpha_n t \rightarrow x_1 = \frac{a_n}{K}\,\frac{1}{1-r_n^2}$$

$x(t)$ avec $\xi = 0$

$$F_2 = b_n \sin\alpha_n t \rightarrow x_2 = \frac{b_n}{K}\,\frac{1}{1-r_n^2}\sin\alpha_n t.$$

Remarque : $F = F_0 \sin\alpha t \rightarrow x = \frac{F_0}{k}\sin\alpha t \cdot \frac{1}{1-r^2}$

La réponce d'un syst periodique de forme quelconque

$$x(t) = \frac{1}{K}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-r_n^2}\left(a_n \cos\alpha_n t + b_n \sin\alpha_n t\right)\right)$$

avec : $\begin{cases} \alpha_n = n \cdot \alpha \\ r_n = \dfrac{\alpha_n}{\omega} = n\dfrac{\alpha}{\omega} \end{cases}$

On a $T_{exitation} = \frac{2\pi}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{T_{exitation}}$

d'ou $\alpha_n = n \cdot \alpha = \frac{2n\pi}{T_{exitation}}$

Mer 26.11.2014.

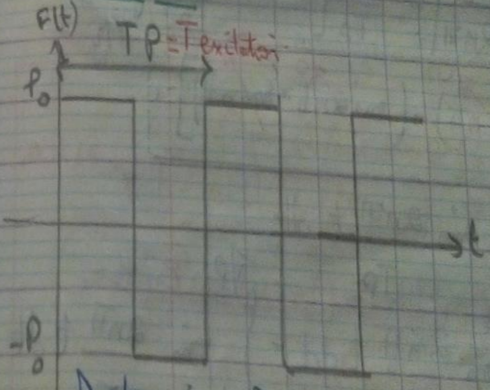
$$a_0 = \frac{1}{T_{exitation}} \int_0^{T_{exitation}} F(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_{exitation}} \int_0^{T_{exitation}} F(t) \cos\frac{2\pi n}{T_{exitation}} t\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_{exitation}} \int_0^{T_{exi}} F(t) \sin\frac{2\pi n t}{T_{exitation}}\,dt$$

coef :
1. Trouver $a_0, a_n, b_n$
2. $x(t)$ ?

Exemple :




$$F(t) = \begin{cases} P_0 & 0 \le t \le \frac{T_p}{2} \\ -P_0 & \frac{T_p}{2} \le t \le T_p \end{cases}$$

Déterminer la reponse de cette excitation ($\xi = 0$)

$$x(t) = \frac{1}{K}\left(a_0 + \dots\right)$$

Calcul des coef de Fourier :

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} F(t)\,dt$$

$$\int_b^c \cos a = \frac{1}{a} \sin a \Big[_b^c \, , \quad \int_b^c \sin a = -\frac{1}{a} \cos a \Big[_b^c$$

$$a_0 = \frac{1}{T_p}\left( \int_0^{T_p/2} P_0 \, dt - \int_{T_p/2}^{T_p} P_0 \, dt \right) = \frac{P_0}{T_p}\left[ t \Big[_0^{T_p/2} - t \Big[_{T_p/2}^{T_p} \right]$$

$$= \frac{P_0}{T_p}\left[ \left(\frac{T_p}{2} - 0\right) - \left(T_p - \frac{T_p}{2}\right) \right] = \boxed{0}$$

$\cos 2\pi = 1$
$\sin \pi = 0$
$\cos \pi = -1$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} F(t) \cos \frac{2n\pi}{T_p} t \, dt$$

$$= \frac{2P_0}{T_p} \int_0^{T_p/2} \cos \frac{2n\pi}{T_p} t \, dt - \int_{T_p/2}^{T_p} \cos \frac{2n\pi}{T_p} t \, dt$$

$$= \frac{\cancel{2}P_0}{\cancel{T_p}} \times \frac{\cancel{T_p}}{\cancel{2}n\pi} \left[ \sin \frac{2n\pi}{T_p} t \Big[_0^{T_p/2} - \sin \frac{2n\pi}{T_p} t \Big[_{T_p/2}^{T_p} \right]$$

$$\boxed{a_n = \frac{P_0}{n\pi} \left[ (\underbrace{\sin n\pi}_{0}) - (\underbrace{\sin 2n\pi}_{0} - \underbrace{\sin n\pi}_{0}) \right] = 0}$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} F(t) \sin \frac{2n\pi}{T_p} t \, dt .$$

$$= \frac{2P_0}{T_p} \int_0^{T_p/2} \sin \frac{2n\pi}{T_p} t \, dt - \int_{T_p/2}^{T_p} \sin \frac{2n\pi}{T_p} t \, dt .$$

$$= \frac{\cancel{2}P_0}{\cancel{T_p}} \times \frac{\cancel{T_p}}{\cancel{2}n\pi} \left[ -\cos \frac{2n\pi}{T_p} t \Big[_0^{T_p/2} + \cos \frac{2n\pi}{T_p} t \Big[_{T_p/2}^{T_p} \right]$$

$$= \frac{P_0}{n\pi} \left[ (-\cos n\pi + 1) + (\cos 2n\pi - \cos n\pi) \right]$$

$$= \frac{P_0}{n\pi} \left( \overset{1}{\cos 2n\pi} - 2\cos n\pi + 1 \right)$$

$$\boxed{b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \dfrac{4P_0}{n\pi} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}}$$

on a $x(t) = \frac{1}{k}\left( \underbrace{a_0}_{0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-r_n^2} \left( \underbrace{a_n}_{0} \cos \alpha_n t + b_n \sin \alpha_n t \right) \right)$

$$x(t) = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-r_n^2} \left( b_n \sin \alpha_n t \right)$$

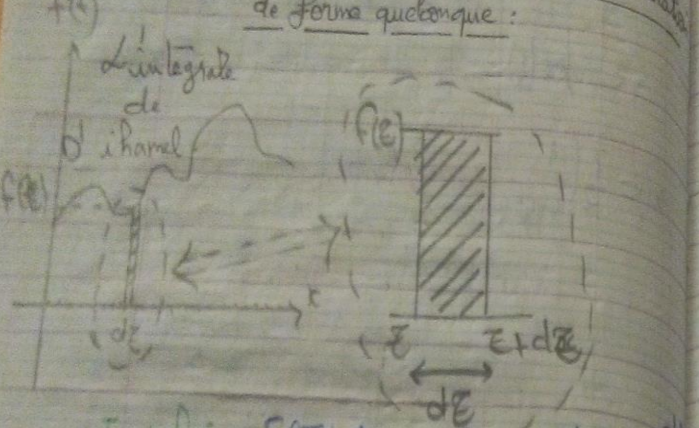
$$\boxed{x(t) = \frac{1}{k}\left( \underbrace{\frac{1}{1+r_1^2} \cdot \frac{4P_0}{\pi} \sin \alpha_1 t}_{n=1} + \underbrace{0}_{n=2} + \underbrace{\frac{1}{1+r_3^2} \frac{4P_0}{3\pi} \sin \alpha_3 t}_{n=3} + \underbrace{0}_{n=4} + \underbrace{\frac{1}{1+r_5^2} \frac{4P_0}{5\pi} \sin \alpha_5 t}_{n=5} + \cdots \right)}$$

$$r_1 = \frac{\alpha}{\omega} , \quad r_3 = \frac{3\alpha}{\omega} , \quad r_5 = \frac{5\alpha}{\omega} .$$

* Systeme amorti ($\xi \neq 0$ et $c \neq 0$)

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{k}\left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n 2 r_n \xi + b_n (1 - r_n^2)}{(1-r_n^2)^2 + (2\xi r_n)^2} \right\} \sin \alpha_n t + \left\{ \frac{a_n (1 + r_n^2) - b_n (2\xi r_n)}{(1 - r_n^2)^2 + (2\xi r_n)^2} \right\} \cos \alpha_n t \right]}$$

## Reponse d'un systeme dynamique soumis a une excitation de forme quelconque :




Impulsion = $F(\tau)d\tau \rightarrow$ changement de vitesse $d\dot{x}$

Quantité de mvt = $m.d\dot{x}$ = impulsion

$$F(\tau)\,d\tau = m\,d\dot{x} \rightarrow d\dot{x} = \frac{F(\tau)\,d\tau}{m}$$

Syst non amortie $\quad CI \begin{cases} x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = d\dot{x} \end{cases}$

$$\begin{cases} dx(t) = A\sin\omega(t-\tau_0) + B\cos\omega(t-\tau) \\ \quad\quad \text{mettre } \tau \text{ comme } t_0 \\ dx(\tau) = B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\dot{x}(t) = A\omega\cos\omega(t-\tau) \\ d\dot{x}(\tau) = A\omega = d\dot{x} = F(\tau)\tau/m \Rightarrow \boxed{A = \frac{F(\tau)d\tau}{m\omega}} \end{cases}$$

$$dx = \frac{F(\tau)}{m\omega}\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

$$x(t) = \int_0^t dx = \int_0^t F(\tau)/m\omega \,\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

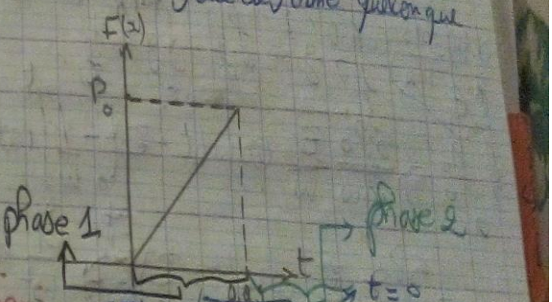
La reponce d'un syst non amorte soumis a une excitation quelconque forcé

→ L'intégrale de Duhamel.

Mer 03/12/2014 :

Application :

Déterminer la réponce d'un systeme non amortie soumis à une force de forme quelconque




Solution :

$$F(t) = at + b \quad \begin{cases} F(0) = \boxed{b = 0} & \rightarrow t = 0,\ F = 0 \\ F(0,2) = a \cdot 0,2 = P_0 \Rightarrow \boxed{a = 5P_0} & t = 0,2,\ F = P_0 \end{cases}$$

$F(t) =$

1 - Trouver la formule d'excitation.

$\boxed{F(t) = 5P_0 t} \rightarrow$ expression de l'excitation

2 - Trouver la réponce.

$$x(t) = \int_0^t \frac{F(\tau)}{m\omega}\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^t \frac{5P_0\tau}{m\omega}\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{5P_0}{m\omega}\int_0^t \underbrace{\tau}_{f}\ \underbrace{\sin\omega(t-\tau)}_{g'}\,d\tau$$

$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$,

en mat = Syllabe du système commence de t=0

$\int \sin x = -\frac{1}{\alpha}\cos x$

et $f = \tau \rightarrow f' = d\tau$

$g' = \sin\omega(t-\tau)\,d\tau \rightarrow g = \frac{1}{\omega}\cos\omega(t-\tau)$

Dérivé par rapport à $\tau$

$x(t) = \frac{5P_0}{m\omega}\int_0^t$

$\int_a^b f\,g' = f\,g\Big|_a^b - \int_a^b g\,f'$

$\int_0^t f g' = \frac{5P_0}{m\omega}\frac{\tau}{\omega}\cos\omega(t-\tau)\Big|_0^t - \frac{1}{\omega}\int_0^t \cos\omega(t-\tau)\,d\tau$

$= \frac{5P_0}{m\omega}\frac{\tau}{\omega}\cos\omega(t-\tau)\Big|_0^t - \frac{1}{\omega^2}\sin\omega(t-\tau)\Big|_0^t$

on a $\int_0^t f g' = \frac{t}{\omega} - \frac{1}{\omega^2}\sin\omega t$.

$$\boxed{x_1(t) = \frac{5P_0}{m\omega^2}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)}$$

$$\boxed{x_1(t) = \frac{5P_0}{k}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)}$$

Phase 1 :

$t \in [0 ; 0,2]$

Système forcé non amorti

Pour $t > 0,2\,s$ : Phase 2

Vibration libre non amortie

Système commence de $t = 0,2$ $t \in ]0,2 ; +\infty[$

$x_2(t) = A\sin\omega(t - 0,2) - B\cos(\omega t - 0,2)$

le temps t initial n'est pas t=0 alors en met ($t$ – 0, 2) pour qui revient à $t_0 = 0$.

$$CI \begin{cases} X_{0_2} = x_1(0,2) \\ \dot{X}_{0_2} = \dot{x}(0,2) \end{cases}$$

$X_2(0,2) = B = X_1(0,2)$

$\dot{X}_2(0,2) = A\omega = \dot{X}(0,2) \Rightarrow A = ?$

à $t = 0,2\,s$

$x_2(t) = x_1(t)$

$\dot{x}_2(t) = \dot{x}_1(t)$

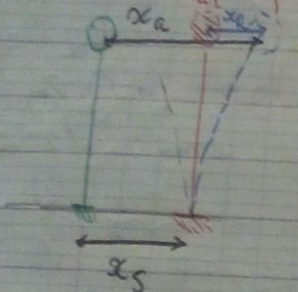
Mer
07-01-2014 :

Réponse d'un système soumis à une excitation d'appuis (cas d'un séisme)

repère absolue

Rabs

$R_{rel}$ : Repère relatif




$x_R$ : déplacement relative.

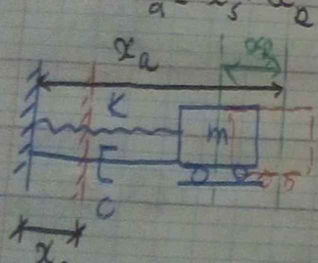
$x_a$ : " absolue.

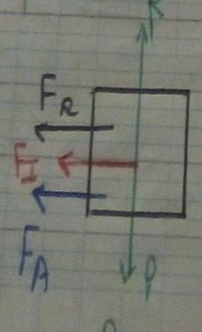
$x_S$ : " du sol

$\ddot{x}_S$ : accélération sismique.

déplacement $x_a = x_S + x_R$

accélération $\ddot{x}_a = \ddot{x}_S + \ddot{x}_R$




$F_R$ : force de rappelle

$F_I$ : force d'inertie

$F_A$ : force d'amortissement.

Les force appliqué sur la structure m.

Il y a d'amortissement c (frottement) si la structure bouge par rapport au repère relative ($R_{rel}$)

$\sum \vec{F}(t) = \vec{0} \Rightarrow F_I + F_A + F_R = 0$.

on a : $F_R = K x_R$

$F_A = C \cdot \dot{x}_R$

$F_I = m \cdot \ddot{x}_a$ car la structure est en accélération du début jusqu'à la fin.

d'ou $\sum \vec{F}(t) = \vec{0}$

$\Rightarrow m\ddot{x}_a + C \cdot \dot{x}_R + K x_R = 0$

on a $\ddot{x}_a = \ddot{x}_S + \ddot{x}_R$

alors :

$m(\ddot{x}_S + \ddot{x}_R) + C\dot{x}_R + K x_R = 0$

$m\ddot{x}_S + m\ddot{x}_R + C\dot{x}_R + K x_R = 0$.

$\Rightarrow \boxed{m\ddot{x}_R + C\dot{x}_R + K x_R = -m\ddot{x}_S} = F(t)$

C'est la réponse du système $\Rightarrow x_R = ?$

- c'est l'équation de mvt d'un système soumis a une excitation d'appuis.
- dont la force d'excitation est une force fictive qui représente les force d'inertie.
- le signe (-) indique que la force est appliqué dans le sens inverse du mvt.

exitation d'appuis : c'est l'déplacement qui est excité par le mvt du sol
forme de la

La réponse $x_R$ dépend de la force appliqué F(t) et plus précisément de $\ddot{x}_S$ (accélération de $x_S$)