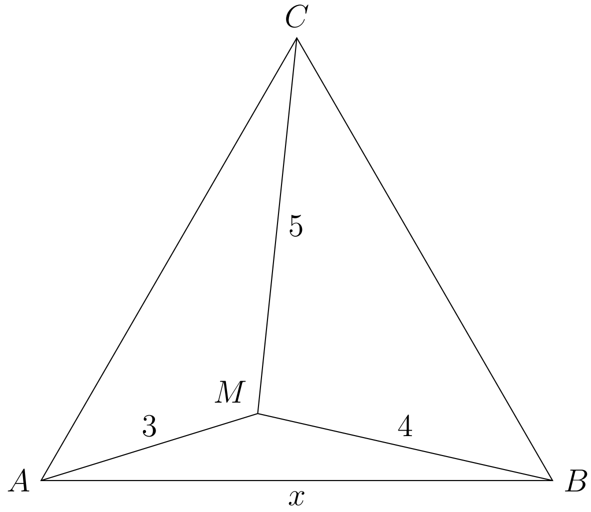
Énoncé du problème :
On considère un triangle équilatéral ABC de côté x.
On suppose qu'il existe un point M intérieur à ABC tel que $AM = 3$, $AB = 4$ et $AC = 5$.
Déterminer la valeur de x.

La figure est la suivante :



Solution :
On considère un repère orthonormé d'origine A ayant la droite (AB) pour axe des abscisses.
Dans ce repère, le triangle ABC étant équilatéral, on a :

$$A(0{,}0) \qquad B(x{,}0) \qquad C\left(\frac{x}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

On cherche les coordonnées de $M(a{,}b)$ telles que $AM = 3$, $BM = 4$ et $CM = 5$.
On doit donc résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} a^2+b^2 & = 9 \\ (x-a)^2+b^2 & = 16 \\ \left(\frac{x}{2}-a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-b\right)^2 & = 25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} a^2+b^2 & = 9 \\ x^2-2ax+a^2+b^2 & = 16 \\ \frac{x^2}{4}-ax+a^2+\frac{3}{4}x^2-\sqrt{3}bx+b^2 & = 25 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} a^2+b^2 & = 9 \\ x^2-2ax & = 7 \quad \text{(utilisation de } L_1) \\ x^2-ax-\sqrt{3}bx & = 16 \quad \text{(utilisation de } L_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} a^2+b^2 & = 9 \\ a & = \dfrac{x^2-7}{2x} \\ \frac{1}{2}x^2-\sqrt{3}bx & = 16-\dfrac{7}{2}=\dfrac{25}{2} \quad \left(L_3-\dfrac{1}{2}L_2\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} a^2+b^2 & = 9 \\ a & = \dfrac{x^2-7}{2x} \\ b & = \dfrac{x^2-25}{2\sqrt{3}x} \end{array}\right.$$

On substitue dans la ligne (L_1) les lignes (L_2) et (L_3) :

$$\left(\frac{x^2-7}{2x}\right)^2+\left(\frac{x^2-25}{2\sqrt{3}x}\right)^2=9 \Leftrightarrow 3\left(x^2-7\right)^2+\left(x^2-25\right)^2=9\times 4\times 3\times x^2$$

On pose $X=x^2$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}3(X-7)^2+(X-25)^2=108X &\Leftrightarrow 3X^2-42X+147+X^2-50X+625-108X=0\\ &\Leftrightarrow 4X^2-200X+772=0\end{aligned}$$

Cette équation du second degré admet deux solutions, toutes deux positives :

$$X_1=25+12\sqrt{3} \quad \text{et} \quad X_2=25-12\sqrt{3}$$

Or $X=x^2$, et x est un nombre positif, donc il y a *a priori* deux valeurs de x possibles :

$$x_1=\sqrt{25+12\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad x_2=\sqrt{25-12\sqrt{3}}$$

Cependant, toute valeur de x à trouver est nécessairement supérieure à 5, puisque le triangle équilatéral doit contenir un segment de longueur 5 ayant pour extrémité un des sommets de ABC.
Ainsi, la valeur x_2 ne convient pas, et seule x_1 est satisfaisante.
Ainsi, la valeur de x recherchée est $x=\sqrt{25+12\sqrt{3}}$.