

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

A matrice d'une rotation

$\det(A) = 1$ et A matrice orthogonale

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) [(a-b)(a-c) + (b-c)^2]$$

$$= (a+b+c) (a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc))$$

or A étant orthogonale

$$\cancel{\det(A)} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad \text{et} \quad ab + ac + bc = 0$$

on obtient

$$\det(A) = a+b+c$$

ce qui entraîne $\cancel{\det(A)} = a+b+c = 1$

puisque $\det(A) = 1$

or a, b, c sont racines du polynôme
 $(t-a)(t-b)(t-c) = t^3 - (a+b+c)t^2 + (ab+bc+ac)t - abc$

or $a+b+c = 1$ et $ab+bc+ac = 0$

Du

a, b, c racines de $t^3 - t^2 - abc$

Donc $\boxed{k = -abc}$

2) précisons la nature de la
 rotation si $k = \frac{4}{27} \cos^2 \varphi$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

posons $\frac{x}{y} = X + \frac{1}{3}$, équation devient

$$\left(X + \frac{1}{3}\right)^3 - \left(X + \frac{1}{3}\right)^2 + k = 0$$

$$X^3 + X^2 + \frac{1}{3}X - \frac{1}{27} - X^2 - \frac{2}{3}X - \frac{1}{9} + k = 0$$

$$X^3 + X = \frac{4}{27} + k \quad (1)$$

$$\text{or } -\frac{4}{27} + k = -\frac{4}{27} \cos^2 \varphi$$

Posons $X = u+v$

$$(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$$

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - u^3 - v^3 = 0 \quad (2)$$

par identification avec (1) on a

$$-3uv = 1 \quad \text{et} \quad u^3 + v^3 = \frac{4}{27} \cos^2 \varphi$$

$$ie \quad u^3 v^3 = -\frac{1}{27} \quad \text{et} \quad u^3 + v^3 = \frac{4}{27} \cos^2 \varphi$$

$$u^6 - \frac{4}{27} \cos^2 \varphi u^3 + \frac{1}{27} = 0$$

poson

$$x = u^3$$

$$x^2 - \frac{4}{27} \cos^2 \varphi x - \frac{1}{27} = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{4}{27} \cos^2 \varphi \right)^2 - 4(1) \left(-\frac{1}{27} \right)$$

$$= \frac{4}{27}$$

$$u^3 = \frac{2}{27} \cos^2 \varphi \pm \sqrt{\left(\frac{2}{27} \cos^2 \varphi \right)^2 + \frac{1}{27}}$$

$$q^2 = \frac{4}{27}$$

$$\frac{1}{27} \left(\frac{4}{27} \cos^2 \varphi + 2 \right)$$

$$\sqrt{2 + \frac{1}{3u^3}}$$

$$u^3 + \frac{1}{27u^3}$$

$$27u^6 + 1 = \frac{4}{27} \cos^2 \varphi u^3$$

Soit $\Omega = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, où a, b, c sont des nombres réels.

① Montrer que Ω est une matrice de rotation si et seulement si a, b, c sont les racines d'une équation de la forme :

$$t^3 - t^2 + k = 0$$

On précisera les conditions sur le nombre réel k .

② Préciser la nature de la rotation si $k = \frac{4}{27} \sin^2 \varphi$, où $0 \leq \varphi \leq 2\pi$