**MATHÉMATIQUES**

**Thème n°1 : Les fonctions**

**Chapitre n°1 : Le second degré**

I – Rappels et définitions

Définition : Dans un cas général, un polynôme est défini, pour , comme ceci : . est appelé un « monôme », d’où le nom polynôme. Trois monômes forment un trinôme, par exemple.

Définition : Un polynôme du second degré est un trinôme est défini, pour , par. sont appelés les coefficients et variable ou valeur indéterminée.

Définition : Une fonction polynôme du second degré est définie par : associe . Il existe trois formes pour une fonction polynôme du second degré :

* la forme développée :, très souvent utilisée pour trouver l’ordonnée d’un point d’abscisse 0,
* la forme canonique : , très souvent utilisée pour le tableau de variations de la fonction,
* la forme factorisée : , très souvent utilisée pour le tableau de signe.

II – Forme Canonique : cas général

Théorème : Soit un polynôme du second degré avec , alors il existe deux réels et tels que ce qui est la forme canonique de ce polynôme. Posons . Alors, et .

Exemple : Donner la forme canonique de .

III – Variations

Théorème : Soit tel que, pour , . Alors, les variations de la fonction f vont dépendre du signe du coefficient .

Si (autrement dit si est positif), la fonction f va être concave et va avoir pour minimum, atteint pour .

Si (autrement dit si est négatif), la fonction f va être convexe et va avoir pour maximum, atteint pour .

IV – Racines de ()

Théorème : Soit avec . On pose le discriminant .

Si alors il existe deux solutions : et .

Si alors il existe une solution double : .

Si alors il n’existe pas de solution dans .

V – Factorisation

Théorème : Soit avec . Posons ainsi que  ; et . De plus, (voir ci-dessus pour et ).

Si alors .

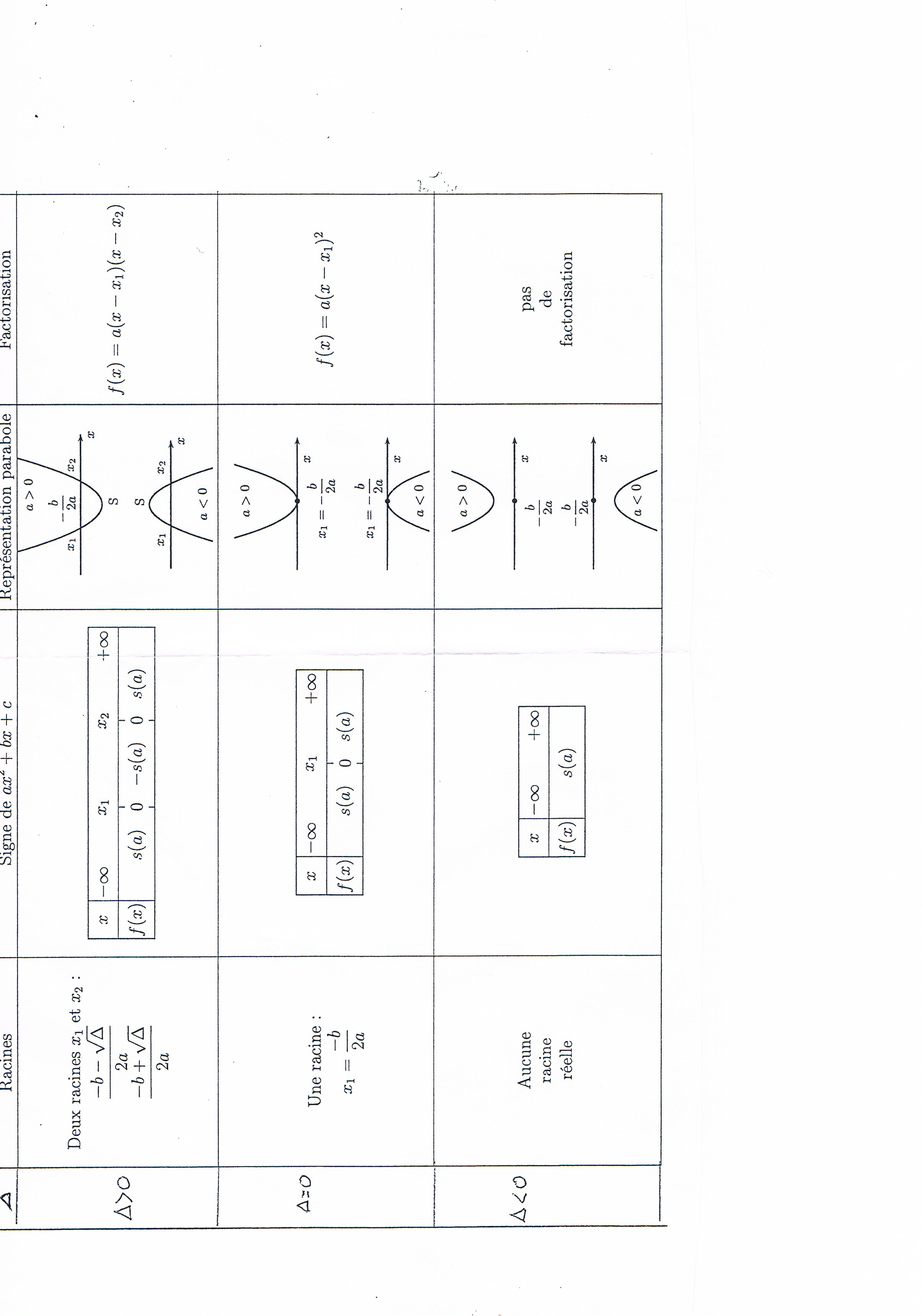
Si alors .

Si alors il n’y pas de factorisation dans .

VI – Signe du trinôme

Soit avec . Le signe de ce trinôme va varier en fonction du coefficient et du discriminant .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  | donc   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | |  |  | | | |  |  |  |  | |  |  |  |  | |  |  |  |  | |  |  |  |  | |  |  |  |  | | donc   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | |  |  | | | |  |  |  |  | |  |  |  |  | |  |  |  |  | |  |  |  |  | |  |  |  |  | |
|  | or et donc  . | or et donc  . |
|  | or et (parce que et si ) donc donc . | or et (parce que et si ) donc donc  . |

VII – Récapitulatif du cours

**Chapitre n°2 : Vecteurs et équations de droite**

I – Rappels

A – L’objet vecteur

Un vecteur est défini par une direction (la droite ), un sens (de son origine ver son extrémité ) et une longueur (sa norme , calculable à l’aide d’un repère orthonormé).

B – Égalité de vecteurs

Dire que équivaut à dire que ABDC est un parallélogramme (éventuelle aplati).

C – Somme de vecteurs

Relation de Chasles :

Règle du parallélogramme :

D – Vecteurs colinéaires

Si deux vecteurs non nuls et sont colinéaires, alors les droites et sont parallèles.

Dire que deux vecteurs non nuls et sont colinéaires équivaut à dire qu’il existe un réel non nul tel que .

E – Coordonnées d’un vecteur

est un repère. et sont deux vecteurs de coordonnées respectives et . est un nombre quelconque.

1 : a pour coordonnées . a pour coordonnées . équivaut à et .

2 : Si les points et ont pour coordonnées respectives et , alors le vecteur a pour coordonnées .

F – Équations de droites

Dans un repère toute droite a une équation de la forme :

* si n’est pas parallèle à l’axe des ordonnées.
* si est parallèle à l’axe des ordonnées.
* Si et sont deux points de tels que alors .

II – Colinéarité

A – Colinéarité dans un plan

Définition : Deux vecteurs et non nuls sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel non nul tel que , ou bien, il existe un réel non nul tel que .

Remarque : Le vecteur nul est colinéaire à n’importe quel vecteur.

B – Colinéarité dans un repère

Théorème : Deux vecteurs et sont colinéaires si, et seulement si, .

et colinéaires

Démonstration :

1 – Démontrons que si les vecteurs et sont colinéaires, alors on a la relation

a – si les vecteurs et sont non nuls

donc et et ainsi et . On obtient : .

b – si le vecteur est nul et est non nul

donc et or est non nul donc et ainsi, .

2 – Démontrons que, pour les vecteurs et , si on a alors on aura et colinéaires.

a – si les vecteurs et sont non nuls

On choisit arbitrairement pour avoir et donc . On pose pour avoir et . Ainsi, on montre que les coordonnées sont proportionnelles et que le réel et le coefficient de proportionnalité. Or, deux vecteurs dont les coordonnées sont proportionnelles sont colinéaires. On a donc et colinéaires.

b – si le vecteur est nul et est non nul

Le vecteur est par définition colinéaire à n’importe quel vecteur donc et colinéaire à .

On a démontré le théorème par une double implication et une disjonction des cas.

III – Décomposition vectorielle

Un repère orthonormée doit avoir l’axe des abscisses et l’axe des ordonnées perpendiculaires et une échelle identique. Il est indispensable pour le calcul des longueurs.

Dans un repère , on pose et . Si ces deux vecteurs sont non nuls, non colinéaires et qu’ils sont tels que : , alors le repère est orthonormé.

Soit un point du plan muni du repère . Les points et sont respectivement les projections du point *M* sur l’axe des abscisses et des ordonnées. On en déduit que les vecteurs et sont colinéaires donc et les vecteurs et sont colinéaires donc . Or donc donc est unique et est appelé les coordonnées du point *M* et du vecteur.

Théorème : Quelque soit le point du plan , il existe un unique couple de réels tels que, si le vecteur est inclus dans le repère , le vecteur se décompose en base tel que .

Théorème : Quelque soit le vecteur , si les vecteurs et ne sont pas colinéaires, il existe un unique couple de réels tel que le vecteur se décompose en base  ; tel que .

IV – Équations de droite

A – Vecteur directeur de droite

Définition : Soient et deux points distincts de la droite . Tout vecteur non nul colinéaire au vecteur est un vecteur directeur de la droite .

et distincts

est directeur de

Remarque : Une droite a une infinité de vecteurs directeurs.

Propriété : Soient et deux droites ayant respectivement pour vecteur directeur et . Les droites et sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs et sont colinéaires.

et colinéaires

B – Équation réduite d’une droite

Propriété : Dans un repère , toute droite non parallèle à l’axe des ordonnées a pour équation réduite . Toute droite parallèle à l’axe des ordonnées a pour équation réduite .

non parallèle à

C – Équation cartésienne d’une droite

Théorème : Dans un repère , toute droite a pour équation cartésienne avec ou . Le vecteur est un vecteur directeur de la droite .

directeur de

Réciproque : Soient , et trois réels tels que ou . L’ensemble des points du plan tels que définit une droite qui a pour équation cartésienne .

**Chapitre n°3 : Les fonctions de référence**

I – Rappels

Jusqu’ici, on a étudié quatre fonctions de référence : la fonction constante, la fonction affine, la fonction inverse et la fonction carrée.

Définition : Une fonction qui est soit croissante soit décroissante sur un intervalle est dite « monotone » sur cette intervalle.

Remarque : Une réunion d’intervalles n’est pas forcément un intervalle.

II – La fonction racine carrée

Définition : La fonction qui va de dans et qui à un associe est appelée « fonction racine carrée ».

Propriété : La fonction racine carrée est strictement croissante sur .

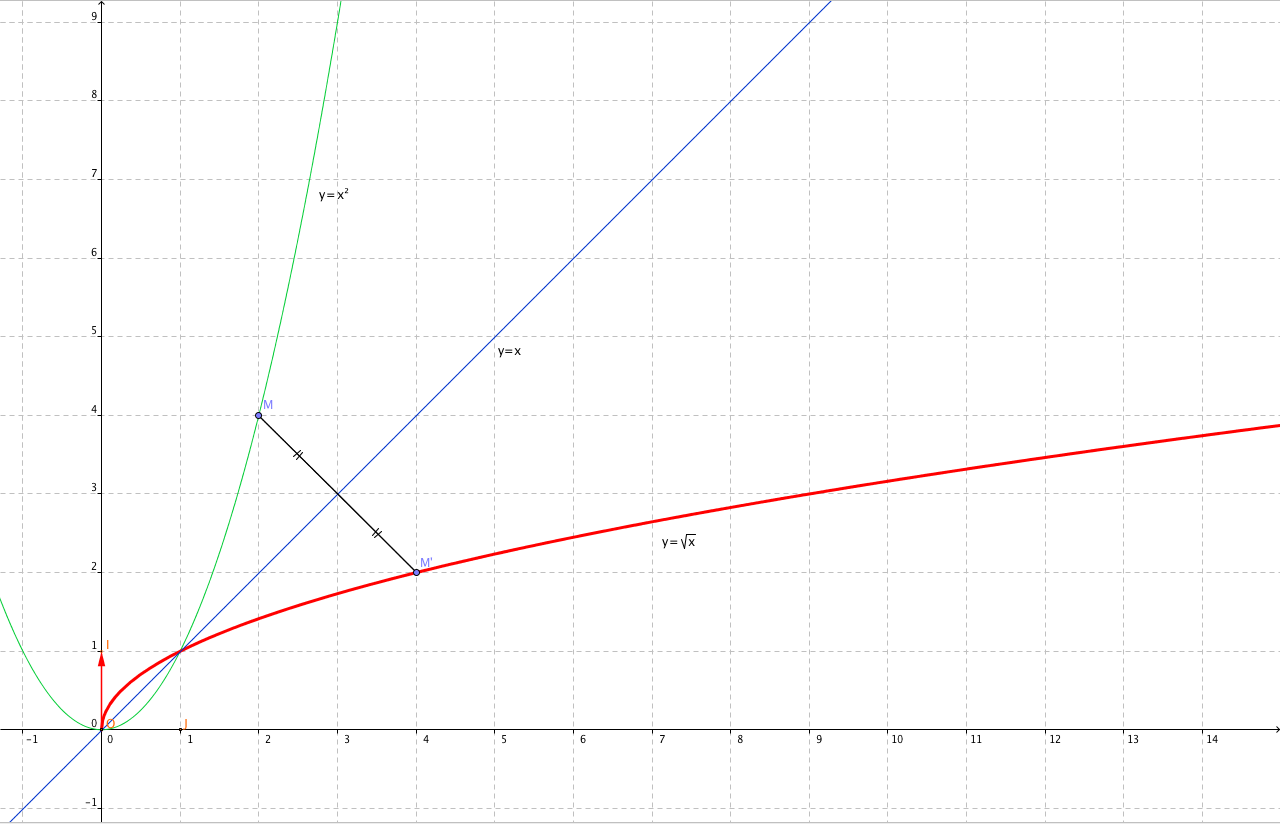
Démonstration :

Soient deux réels et tels que .

Or, (car ) et une racine carrée étant toujours positive, donc donc donc . Le sens des inégalités est conservé donc la fonction racine carrée est croissante sur .

Représentation graphique :

*Faisons la croissance comparée des trois fonctions de référence identité, carrée et racine carrée.*



Remarques :

* Les fonctions carrée et racine carrée sont réciproques.
* Dans un repère , soient deux points : et son symétrique . On a alors .

III – La valeur absolue

On considère que l’ensemble des réels peut être représenté par la droite suivante :

9

4

5

Y

X

5

-4

0

Remarques :

, ,

(si ), (si ),

, ,

, ,

Définition : La valeur absolue d’un réel est la distance de à 0 sur la droite des réels.

Remarques :

* (mais n’est pas forcément négatif)

Propriété :

* : c’est l’inégalité triangulaire

Démonstration :

Soient deux réels et . On a donc et . Comme , on obtient donc puis et enfin . On a ainsi démontré l’inégalité triangulaire.

IV – Équations et inéquations

Propriété : Soit un réel et un réel positif ou nul. On a alors :

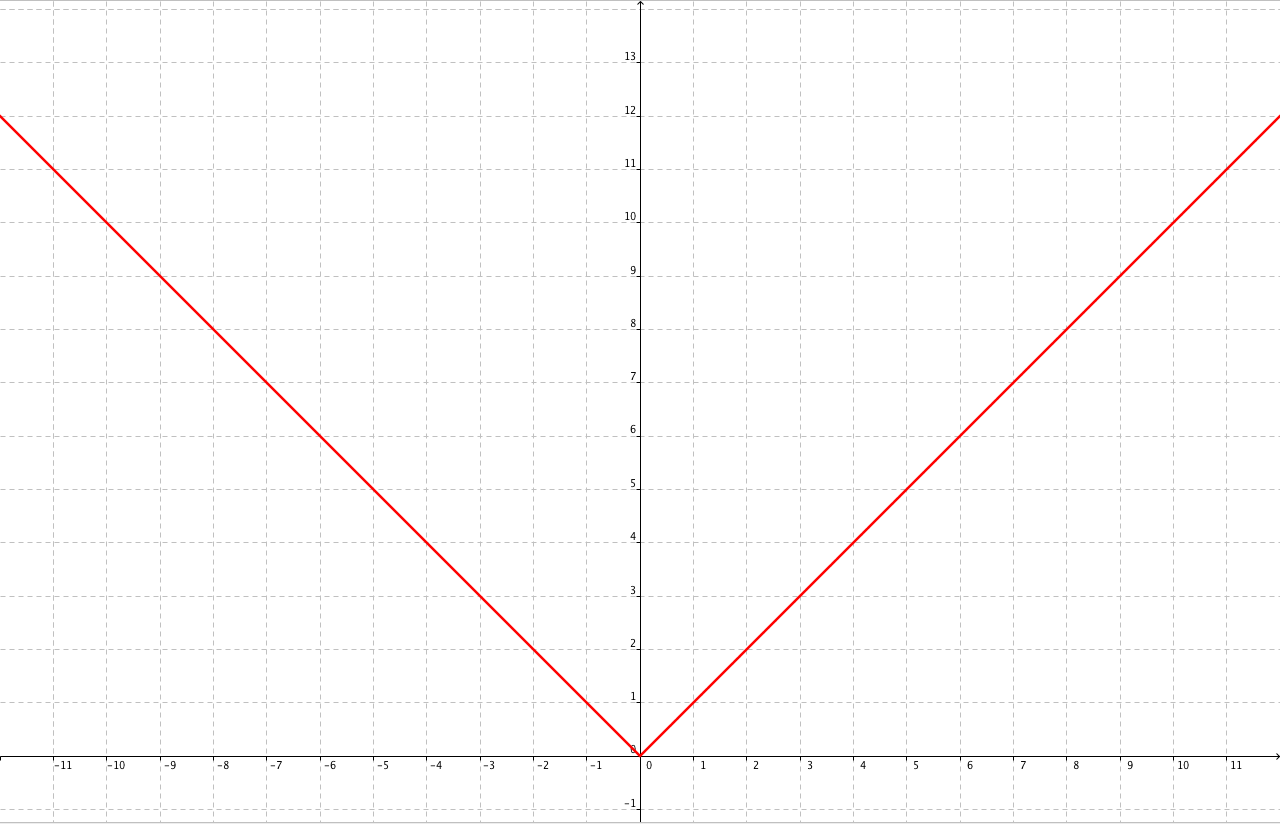
V – La fonction valeur absolue

Définition : La fonction qui va de dans et qui à associe la valeur absolue de est appelée « fonction valeur absolue ».

Sens de variation de la fonction valeur absolue sur  :

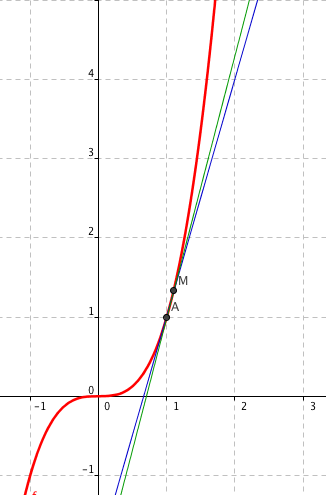
* strictement décroissante
* strictement croissante

Représentation graphique :



**Chapitre n°4 : Dérivation**

I – Introduction : étude d’un exemple

 Soit la fonction cube et sa courbe représentative dans un repère . Soit et deux réels avec non nul. Soit deux points et .

La fonction cube est représentée en rouge sur l’intervalle . La tangente à passant par est dessinée en bleu et la droite est tracée en verte pour .

On remarque que plus est petit, plus droite se rapproche de la tangente à passant par .

On appelle le taux d’accroissement de entre et . Ainsi, on a :

On fait tendre vers 0 et cela nous donne :

Lorsque tend vers 0, la droite se rapproche de la tangente à la courbe au point . Le coefficient directeur de la droite tend vers une valeur limite finie qu’on appelle nombre dérivé, noté . Ici, .

II – Nombres dérivés

Définition : Soit une fonction définie sur avec et avec . Le taux d’accroissement de entre et est défini par la formule :

Définition : Soit une fonction définie sur avec et avec . Si le taux d’accroissement de entre et tend vers un unique réel lorsque tends vers 0, alors on dit que est dérivable en et on note le nombre dérivé.

III – Équation de la tangente

Soient une fonction définie et dérivable en et sa courbe représentative dans un repère . La tangente de cette courbe a pour coefficient directeur et a une équation réduite du type . Or mais aussi donc et . Ainsi, on obtient une équation de la tangente :

IV – Approximation affine

Définition : Soit une fonction définie et dérivable en . On appellera le nombre dérivé. Soit une fonction définie par :

avec lorsque . On a donc :

et lorsque , , on obtient :

On dit que ce nombre est une approximation affine au voisinage de .

V – Fonctions dérivées

Définition : Soit une fonction définie sur et soit un intervalle inclus dans . On dit que est dérivable sur si pour tout de , admet un nombre dérivé appelé . On dit que est la fonction dérivée de sur .

Dérivées usuelles :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
| avec |  |  |  |
| avec |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

VI – Opérations sur les dérivées

Propriétés :

Soient et deux fonctions dérivables sur et un réel non nul.

À partir de ces trois propriétés, on peut en déduire quatre autres, pour  :

Démonstration de  :

Soient une fonction dérivable sur et un réel non nul ainsi que et deux réels tels que , et .

Démonstration de  :

Soient et deux fonctions dérivables sur et un réel non nul ainsi que et deux réels tels que , et .

Or, on sait que :

Donc :

VII – Variations d’une fonction

Théorème : Soit une fonction dérivable sur un intervalle .

1. est constantesur
2. est croissante sur et est décroissante sur
3. est strictement croissante sur et la dérivée s’annule dans un nombre fini de points ; autrement dit, s’annule éventuellement en quelques points isolés sur . est strictement décroissante sur et la dérivée s’annule dans un nombre fini de points ; autrement dit, s’annule éventuellement en quelques points isolés sur .

VIII – Extremum local

Définition : Soit une fonction définie sur l’intervalle contenant le réel .

Si on peut trouver un intervalle ouvert contenant tel que, pour , ou , alors est un extremum local. Si , c’est un maximum local ; si , c’est un minimum local.

Théorème : Soit une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant et, de plus, est dérivable en . Si est un extremum local, alors .

Remarque : La réciproque est fausse.

Théorème : Soit une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant le réel . On suppose que est dérivable en . Si la dérivée s’annule en en changeant de signe alors est un extremum.

**Chapitre n°5 : Statistiques**

I – Médianes et quartiles : indicateurs de position

Définition : La médiane d’une série statistique, notée , est telle qu’au moins 50% des individus ont une valeur du caractère inférieure ou égale à la médiane et qu’au moins 50% des individus ont une valeur du caractère supérieure ou égale à la médiane.

Définition : Le premier quartile d’une série statistique, noté , correspond au plus petit nombre de la série tel qu’au moins 25% des données soient inférieures ou égales à ce nombre.

Définition : le troisième quartile d’une série statistique, noté , correspond au plus petit nombre de la série tel qu’au moins 75% des données soient inférieures ou égales à ce nombre.

Définition : L’intervalle interquartile est l’intervalle entre le premier et le troisième quartile. On le note .

Définition : L’écart interquartile est la différence entre le troisième et le premier quartile. On le note .

Définition : Le diagramme en boîte représente graphiquement un une série statistique avec ses principaux indicateurs de position.

II – Moyenne, variance et écart-type : indicateurs de dispersion

Définition : Soit une série statistique où représente la valeur du caractère étudié à la position et l’effectif associé. Soit . La moyenne de est égale à :

Définition : Soit une série statistique où représente la valeur du caractère étudié à la position et l’effectif associé. Soit . Soit la moyenne de . Soit un réel et une fonction définie par . La variance de est telle que :

Définition : Soit une série statistique où représente la valeur du caractère étudié à la position et l’effectif associé. Soit la variance de . L’écart-type de est tel que :

Remarque : L’écart-type sert à mesurer la dispersion d’une série autour de la moyenne. En effet, plus il est petit, plus la série est homogène et, à l’inverse, plus il est grand, plus la série est hétérogène.

Propriété : Soit une série statistique où représente la valeur du caractère étudié à la position et l’effectif associé. Soit la moyenne de . La moyenne des carrés des valeurs de est supérieure ou égale au carré de moyenne des valeurs de .

Théorème : Les mathématiciens Kœnig et Huygens ont déterminé une formule pour calculer la variance d’une série statistique. Soit une série statistique où représente la valeur du caractère étudié à la position et l’effectif associé. Soit la moyenne de . La variance de est telle que :

Propriété : Soient une série statistique où représente la valeur du caractère étudié à la position et l’effectif associé et une série statistique où représente la valeur du caractère étudié à la position et l’effectif associé. Soient la moyenne de et la moyenne de . On pose où et sont deux réels. On a alors la relation :

Démonstration : On reprend les mêmes données que ci-dessus et on pose . Par définition :

Propriété : Soient une série statistique où représente la valeur du caractère étudié à la position et l’effectif associé et une série statistique où représente la valeur du caractère étudié à la position et l’effectif associé. Soient l’écart-type de et l’écart-type de . On pose où et sont deux réels. On a alors la relation :

Démonstration : On reprend les mêmes données que ci-dessous et on pose . Par définition :

Or :

Donc :

**Chapitre n°6 : Trigonométrie**

I – Algorithme d’enroulement d’une droite autour d’un cercle ou

Définition : Un plan est orienté lorsque tous les cercles de ce plan sont orientés dans le même sens.

Définition : Le cercle trigonométrique, noté , est un cercle orienté de rayon 1.

Propriété : Soit un cercle trigonométrique du plan de centre . Soit le Repère OrthoNormé Direct (ROND) avec . Soit la tangente à en . Suivant , à tout réel de , on associe un unique point sur . On dit que le point du cercle est associé au réel .

Exemples : Soit .

autrement dit.

*(voir la figure ci-dessous)*

II – Le radian

Définition : Soit un cercle trigonométrique de centre du plan. Soit le ROND avec . Soit . Un radian est la mesure de l’arc .

Propriété : Soit un cercle trigonométrique de centre du plan. Soit le ROND avec . Soit . Un radian est une mesure de l’angle orienté .

*(voir la figure ci-dessous)*

III – L’angle orienté

Définition : Soit un cercle trigonométrique du plan de centre . Soit le ROND avec . Soit . et . La mesure en radians de l’angle orienté est ou . On note le modulo «  » de l’angle orienté .

IV – Angle orienté de deux vecteurs du plan

Soient et deux vecteurs quelconques du plan muni d’un ROND . Soient et deux représentant de respectivement et .

Soient , et tels que et . On a donc :

et

Propriété : Parmi toutes les mesures possibles de l’angle orienté , il existe une seule mesure, appelée mesure principale, appartenant à l’intervalle .

Propriétés de calcul :

Soient , et trois vecteurs non nuls.

1. Selon la relation de Chasles :

V – Colinéarité

Soient et deux réels non nuls et et deux vecteurs non nuls.

1. Posons et colinéaires. On a donc et finalement ou .



VI – Cosinus et sinus d’un réel

A – Définition

Soit un cercle trigonométrique de centre du plan. Soit le repère orthonormé . Il est direct si et indirect si . Soit . Par définition, l’abscisse de est le cosinus du réel et son ordonnée est le sinus du réel .

B – Propriétés

Soit un cercle trigonométrique de centre du plan. Soit le repère orthonormé . Il est direct si et indirect si . Soit .

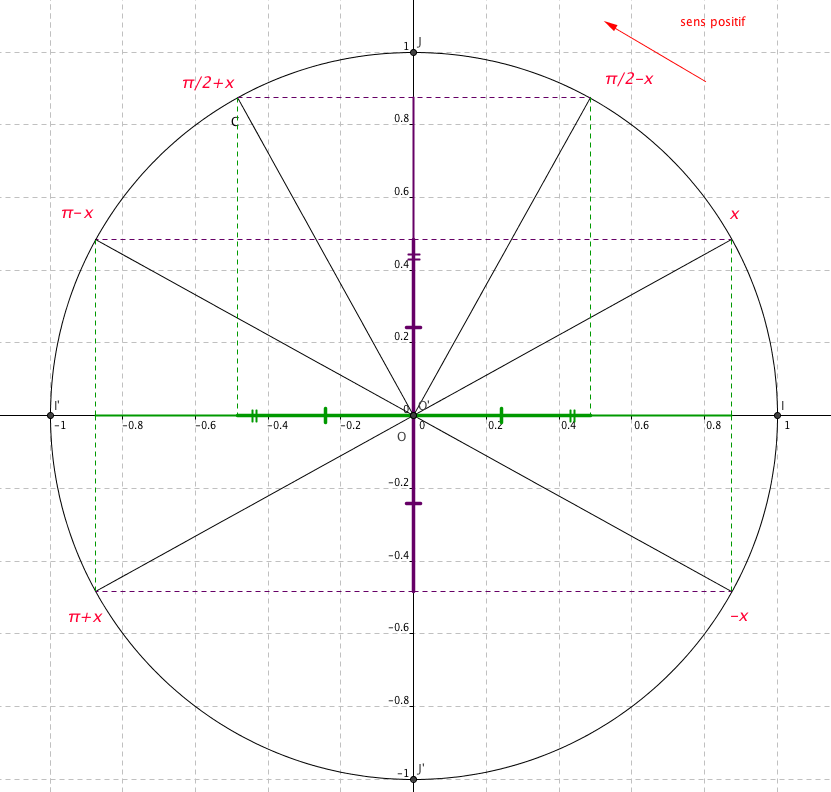
C – Angles associés

Soit un cercle trigonométrique de centre du plan. Soit le ROND . Soit . On a et opposés donc et sont supplémentaires, etsont supplémentaires, et sont complémentaires et enfin et sont complémentaires.

D – Sinus et cosinus d’angles associés

Soit un cercle trigonométrique de centre du plan. Soit le ROND . Soit . On obtient les formules suivantes :

Graphiquement, cela donne :

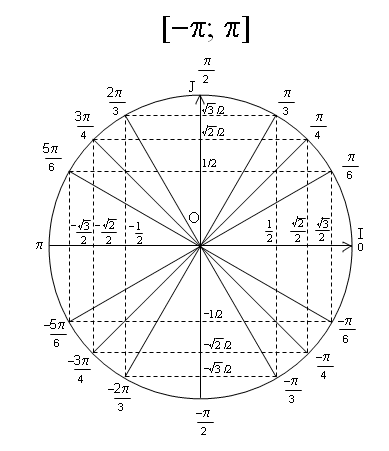


E – Cosinus et sinus d’angles remarquables

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

F – Résolution d’équation

Soient et .



**Chapitre n°7 : Probabilités**

I – Variables aléatoires

A – Rappels

|  |  |
| --- | --- |
| Vocabulaire | Exemple :  On lance un dé à six faces équilibré. |
| Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne connaît pas le résultat à l’avance. | « On lance un dé à six faces équilibré. » |
| Un événement élémentaire, aussi appelé une issue, est une des résultats possibles de l’expérience aléatoire. | Obtenir 3 est un événement élémentaire. |
| L’univers est l’ensemble de tous les résultats possibles. On le note . |  |
| Un événement est une partie de . | Posons l’événement *A* : « Obtenir un nombre pair » et l’événement *B* : « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 »  et |
| Un événement est certain s’il contient tous les résultats possibles. | Si l’événement *C* est tel que *C* : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 10 », alors *C* est un événement certain. |
| Un événement est impossible s’il n’est jamais réalisé. | Si l’événement *D* est tel que *D* : « Obtenir un 7», alors *C* est un événement impossible. |
| Un événement noté est l’événement contraire de l’événement . |  |
| L’intersection des événements *A* et *B*, noté , est réalisé lorsque *A* et *B* sont réalisés. | Si l’événement  est tel que : « Obtenir un nombre pair et supérieur ou égal 3 », alors . |
| La réunion des événements *A* ou *B*, noté , est réalisée lorsque soit *A*, soit *B*, soit *A* et *B* se réalisent. | Si l’événement  est tel que : « Obtenir un nombre pair ou supérieur ou égal 3 », alors . |
| Des événements *A* et *B* sont incompatibles  ou disjoints lorsqu’ils n’ont pas de résultats communs, autrement dit que . | Si l’événement *E* est tel que *E* : « obtenir 1 », alors et *A* et *E* sont disjoints. |

Définition : À chaque événement élémentaire est associée sa probabilité qui est un nombre compris entre 0 et 1.

B – Étude d’un exemple

Soient et deux dés équilibrés à six face.

On lance : et . On lance et : et . Soit une variable aléatoire : . Soit l’événement «  » et l’événement «  ». On cherche à savoir la loi de probabilité de . Pour cela, on consigne dans un tableau les différentes valeurs possibles de en fonction des issues possibles des l’expérience aléatoire précédente :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **2** | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **3** | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| **4** | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| **5** | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| **6** | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

On obtient alors le tableau qui donne la loi de probabilité de  :

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  | 1 |

Maintenant, on attribue à l’événement le gain de 10€ et à l’événement la perte de 5€. On programme alors un algorithme qui nous permet de calculer les gains pour un nombre de parties et la moyenne de gains par partie.



Ainsi, après plusieurs simulations de 1000 parties, on trouve une moyenne des gains par partie d’environ 0,011. On peut retrouver cette valeur par la formule de l’espérance mathématique  :

C – Définitions

Définition : Lorsque l’on associe à chaque éventualité de l’univers un réel, on dit que l’on définit une variable aléatoire sur .

Notation : L’ensemble des valeurs prises par est noté .

Notation : L’événement «  prend la valeur  » se note toujours .

Définition : La loi de probabilité d’une variable aléatoire est donnée par le tableau suivant :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | 1 |

Exemple : Soit l’expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce de monnaie équilibrée. J’observe la phase visible. Si je vois le côté « face », je gagne deux euros ; je vois le côté « pile », je perd un euro. On définit une variable aléatoire qui représente le gain obtenu. Donner la loi de probabilité de .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  | 1 |

II – Espérance, variance et écart-type d’une variable aléatoire

A – Définitions

Soit tel que .

Définition : L’espérance, notée , est définie par :

Remarque : On peut faire une analogie entre la moyenne d’une série statistique et l’espérance d’une variable aléatoire.

Définition : La variance, notée , est définie par :

Définition : L’écart-type, noté , est défini par :

B – Propriétés

Propriétés entre espérance, variance et écart-type :

Soit une variable aléatoire.

Démonstration de la propriété 2. :

Soient et deux réels et une variable aléatoire.

Or :

et

Donc :

**Chapitre n°8 : Loi binomiale**

I – Épreuve et loi de Bernoulli

Définition : On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre toute épreuve aléatoire ayant deux issues contraires et de probabilités respectives et .

Propriété : On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre et la variable aléatoire avec . On pose que si alors l’épreuve est un échec et que si , alors l’épreuve est un succès. On peut alors définir la loi de probabilité de la variable aléatoire par et . On dit alors que la variable aléatoire suit la loi de Bernoulli de paramètre .

II – Espérance, variance et écart-type d’une épreuve de Bernoulli

Propriétés : Soit une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre . On a alors la valeur de l’espérance , de la variance et de l’écart-type .

III – Schéma de Bernoulli

Définition : Soit . On répète fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre . On obtient alors le schéma suivant :

ème épreuve

2ème épreuve

1ère épreuve

chemins ou issues

Propriétés :

1. La somme des probabilités de chaque branche issue d’un nœud est égale à 1.
2. La probabilité d’un chemin ou d’une issue est le produit des probabilités de chaque branche de même chemin.
3. La probabilité d’un événement est la somme de celles des issues le réalisant.
4. Le nombre de chemins d’un schéma de Bernoulli à épreuves de paramètre réalisant succès est noté et est appelé coefficient binomial.

IV – Loi binomiale

Définition : On considère un schéma de Bernoulli à épreuves de paramètre . Soit un réel compris entre 1 et . On associe à chaque épreuve une variable aléatoire telle que . On dit que suit une loi binomiale de paramètres et . On le note .

Théorème : Soit la variable aléatoire comptant le nombre de succès après la réalisation de épreuves de Bernoulli de paramètre . On a donc . On obtient alors la formule suivante :

V – Espérance, variance et écart-type d’une variable suivant une loi binomiale

Propriétés : Soit . On obtient alors :

Propriété : Soient deux variables aléatoires et telle que . On a alors .

VI – Propriétés des coefficients binomiaux

Propriétés : Soit une variable aléatoire et le nombre de succès après la réalisation de épreuves. On obtient alors le coefficient binomial suivant : . On peut énoncer des propriétés de calcul avec ce coefficient binomial :

Théorème : La valeur de chaque coefficient binomial est donné par le triangle de Pascal donc la formule générale est la suivante :

Démonstration :

On raisonne par disjonction des cas.

1er cas : La première épreuve est un succès. Ainsi, pour obtenir , il suffit d’obtenir succès pour les épreuves restantes. Il y a donc chemins possibles pour obtenir succès pour épreuves.

2ème cas : La première épreuve est un échec. Ainsi, pour obtenir succès, il suffit d’obtenir succès pour les épreuves restantes. Il y a donc chemins possibles pour obtenir succès pour épreuves.

On retrouve donc bien la formule précédente.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |