

Exercice 1

- 1) Soit M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer M^3 puis en déduire que M n'est pas inversible.

- 2) Soit A une matrice carrée d'ordre 3 vérifiant $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

a) Montrer que A n'est pas inversible.

b) Vérifier que $X^3 = 1 - (1 - X)(1 + X + X^2)$.

c) En remarquant que X^3 est un polynôme annulateur de A , montrer que $I - A$ est inversible et calculer son inverse.

- 3) Montrer également que $I + A$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 1

$$1) M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc : $M^3 = 0$

Or, si M était inversible, on aurait alors la relation suivante :

$$M^3 M^{-1} = 0 \cdot M^{-1}$$

$$M^3 M^{-1} = 0$$

$$M^2 \cdot M \cdot M^{-1} = 0$$

$$M^2 = 0$$

Or, on a $M^2 \neq 0$. Par conséquent, M n'est pas inversible.

2) a) Grâce à 1.), on voit que pour $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$, M ne peut être inversible. Dès lors, pour n'importe quelle matrice A vérifiant les propriétés $A^3 = 0$ et $A^2 \neq 0$, A n'est pas inversible.

$$b) 1 - (1-x)(1+x+x^2) = 1 - (1+x+x^2-x-x^2-x^3) \\ = 1 - (1-x^3) = 1-1+x^3 = x^3.$$

On a donc bien : $x^3 = 1 - (1-x)(1+x+x^2)$

c) On note $P(X) = X^3$ un polynôme. On a alors :

$$P(A) = A^3 = 0.$$

X^3 est donc bien un polynôme annulateur de A .

Or, d'après 2. b), on sait que $X^3 = (1-X)(1+X+X^2)$.

On a donc : $A^3 = 0$

$$I - (I-A)(I+A+A^2) = 0$$

$$I = (I-A)(I+A+A^2)$$

Par conséquent, $I-A$ est bien inversible on a :

$$(I-A)^{-1} = I+A+A^2$$

3) Développons $(1+X)/(1-X+X^2)$:

$$(1+X)/(1-X+X^2) = 1-X+X^2+X-X^2+X^3 = 1+X^3$$

On a donc : $(I+A)/(I-A+A^2) = I+A^3$

Or, on sait que $A^3 = 0$ ce qui donne :

$$(I+A)(I-A+A^2) = I.$$

$I+A$ est donc bien inversible et on a :

$$(I+A)^{-1} = I-A+A^2$$