Exercice 10

On considère la fonction f définie, pour tout réel x de $[0,+\infty[$, par la relation : $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$.

1. (a) On note f' la dérivée de f. Calculer, pour tout réel x positif, $f'(x)$.
   (b) Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
   (c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   (d) Dresser le tableau de variation de f.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=1$ et la relation : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

2. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $0<u_n\leqslant \dfrac{1}{n}$.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n=\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de u_n.
   (b) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'encadrement suivant :

$$2\leqslant v_n\leqslant 2+\frac{1}{n}$$

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$2(n+1)\leqslant \frac{1}{u_n}\leqslant 2(n+1)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

5. (a) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, comparer $\dfrac{1}{k}$ et $\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}dt$.
   (b) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant 1+\ln(n)$$

6. Utiliser les questions précédentes pour montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n=\frac{1}{2}$

Exercice 10

1) a) $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{(x+1)^2 - x2(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{x^2+2x+1-2x^2-2x}{(x+1)^4}$

$= \dfrac{-x^2+1}{(x+1)^4}$ $\boxed{f'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x+1)^4}}$

b) Le signe de $f'(x)$ dépend donc de $-x^2+1$.

On a $-x^2+1=0$ pour $x=-1$ et $x=1$. Or, $f(x)$ est définie sur $[0;+\infty[$ donc on a : - $f'(x)=0$ pour $x=1$

- $f'(x) > 0$ pour $x \geq 0$ mais $x<1$.
- $f'(x) < 0$ pour $x > 1$.

c) On a $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2} = \dfrac{x}{x^2+2x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2+2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

d) Grâce aux questions 1.a), 1.b) et 1.c), on en déduit le tableau de variations suivant.

x	0		1		$+\infty$
variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

2)a) $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{1}{4}$

$$\boxed{u_1 = \frac{1}{4}}$$

$$u_2 = f(u_1) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{\left(1+\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{25}{16}} = \frac{1}{4} \times \frac{16}{25} = \frac{4}{25}$$

$$\boxed{u_2 = \frac{4}{25}}$$

b) <u>Initialisation</u> : pour $n = 1$ on a $0 < u_1 \leq 1$

$0 < \frac{1}{4} \leq 1$

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n = 1$.

<u>Hérédité</u> : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$

et l'énoncé nous donne $u_{n+1} = f(u_n)$.

$$0 < u_n \leq \frac{1}{n}$$

$$f(0) < f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$0 < u_{n+1} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$$

$$0 < u_{n+1} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\frac{(n+1)^2}{n^2}}$$

$$0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n} \times \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$V_n = \frac{1}{f(U_n)} - \frac{1}{U_n}$$

$$V_n = \frac{1}{\frac{U_n}{(U_n+1)^2}} - \frac{1}{U_n}$$

$$V_n = \frac{(U_n+1)^2 - 1}{U_n}$$

$$V_n = \frac{U_n^2 + 2U_n + 1 - 1}{U_n}$$

$$V_n = \frac{U_n(U_n+2)}{U_n}$$

$$\boxed{V_n = U_n + 2}$$

b) D'après 2.b) on a $0 < U_n \leq \frac{1}{n}$ et d'après 3.a) on a $V_n = U_n + 2$.

$$0 < U_n \leq \frac{1}{n}$$

$$2 < U_n + 2 \leq \frac{1}{n} + 2$$

$$\boxed{2 < V_n \leq 2 + \frac{1}{n}}$$

4) <u>Initialisation</u> : pour $n = 2$ on a : $2(2+1) \leq \frac{1}{U_2} \leq 2(2+1) + 1$

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n = 2$.

$$6 \leq \frac{25}{4} \leq 7$$

$$6 \leq 6,75 \leq 7$$

<u>Hérédité</u> : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

$$0 \leq U_{n+1} \leq \frac{n}{(n+1)^2}$$

Cherchons maintenant à démontrer que $\frac{1}{n} \geq \frac{n}{(n+1)^2}$.

Pour cela, calculons $\frac{1}{n} - \frac{n}{(n+1)^2}$:

$$\frac{1}{n} - \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n(n+1)^2} = \frac{n^2+2n+1-n^2}{n(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n(n+1)^2} \geq 0$$

On a $\quad \frac{1}{n} - \frac{n}{(n+1)^2} \geq 0$

$$\frac{1}{n} \geq \frac{n}{(n+1)^2}.$$

Ainsi on obtient $\quad 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{n}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n}$

$$\boxed{0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{n}}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

c) D'après 2.b) on a $\quad 0 \leq U_n \leq \frac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Par encadrement, on a donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 0}$$

3) a) On a : $\quad V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n}$

D'après l'hypothèse de récurrence on a $2(n+1) \leq \frac{1}{U_n} \leq 2(n+1) + \sum_{1}^{n-1} \frac{1}{k}$

et l'énoncé nous donne $V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n}$ ce qui nous permet de déduire $\frac{1}{U_{n+1}} = V_n + \frac{1}{U_n}$.

De plus, grâce à 3.b) on sait que $2 \leq V_n \leq 2 + \frac{1}{n}$.

En additionnant les deux inégalités on obtient alors :

$$2(n+1)+2 \leq \frac{1}{U_n} + V_n \leq 2(n+1)+2+\sum_{1}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}$$

$$2n+4 \leq \frac{1}{U_{n+1}} \leq 2n+4+\sum_{1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\boxed{2(n+2) \leq \frac{1}{U_{n+1}} \leq 2(n+2)+\sum_{1}^{n}\frac{1}{k}}$$

<u>Conclusion :</u> Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant !

5) a) - On a $k \geq 2$ donc pour $\frac{1}{k}$, la plus grande valeur possible est celle de $k=2$, c'est à dire que l'on a :

$$\boxed{\frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}}$$ car la suite $\frac{1}{k}$ est décroissante

$$- \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt = [\ln|t|]_{k-1}^{k} = \ln(k) - \ln(k-1) = \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$$

Or, la suite $\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$ est croissante donc la plus petite valeur de $\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$ est pour $k=2$ ce qui donne :

$$\boxed{\ln(k) - \ln(k-1) \geq 0{,}69}$$

Ainsi, on aura toujours :

$$\frac{1}{k} - \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt \le 0$$

$$\boxed{\frac{1}{k} \le \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt}$$

b) D'après 5.a), on a :

$$\frac{1}{k} \le \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \ln(k-1)$$

Ainsi, par télescopage, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1) + 1$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \ln(n)}$$

6) La question précédente nous donne $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 1+\ln(n)$ et 4) nous donne :

$$2(n+1) \le \frac{1}{u_n} \le 2(n+1) + \sum_{1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$2(n+1) \le \frac{1}{u_n} \le 2(n+1) + 1 + \ln(n)$$

$$\frac{1}{2n+2} \ge u_n \ge \frac{1}{2n+3+\ln(n)}$$

$$\frac{n}{2n+2} \ge n u_n \ge \frac{n}{2n+3+\ln(n)}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+3+\ln(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

Par encadrement, on a donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}}$$