Exercice I 1 ⓐ $\Pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Pi^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ (matrice nulle)

supposons que Π soit inversible, notons Π^{-1} son inverse.
On a $\Pi^3 = 0$ on multiplie à gauche et à droite par Π^{-1}
$\Pi^{-1}\Pi^3 = \Pi^{-1}0$ soit $(\Pi^{-1}\Pi)\Pi^2 = 0$ soit $\Pi^2 = 0$ ce qui est absurde puisque $\Pi^2 \neq 0$ donc Π n'est pas inversible.

ⓑ $\Pi^3 = 0$ donc $\Pi^4 = \Pi.\Pi^3 = 0$. Soit $n \geq 3$. • si $n = 3$ $\Pi^n = \Pi^3 = 0$
• si $n > 3$ $n - 3 \geq 1$ d'où $\Pi^n = \Pi^{n-3}.\Pi^3 = \Pi^{n-3}.0 = 0$
donc $\forall n \geq 3$ $\Pi^n = 0$

ⓒ I et Π commutent pour le produit et les puissances de Π commutent entre elles
donc $(I - \Pi)(I + \Pi + \Pi^2) = I + \Pi + \Pi^2 - \Pi - \Pi^2 - \Pi^3$ or $\Pi^3 = 0$
d'où $(I - \Pi)(I + \Pi + \Pi^2) = I$
de même $(I + \Pi + \Pi^2)(I - \Pi) = I$
donc $I - \Pi$ inversible et $(I - \Pi)^{-1} = I + \Pi + \Pi^2$

ⓓ On a $\Pi^3 = 0$ donc le polynôme $P[X] = X^3$ est annulateur.

ⓔ On a $\mathrm{spec}(\Pi) \subset \{$racines du polynôme $P[X]\}$
or la seule racine de $P[X] = X^3$ est zéro
donc la seule valeur propre possible de Π est zéro.

2 ⓐ $S = \Pi + I$ Π et I commutent donc la formule du binôme est licite pour calculer $(\Pi + I)^n$.

• si $n = 0$ $S^0 = I$
• si $n = 1$ $S^1 = S$
• si $n \geq 2$ $S^n = (\Pi + I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Pi^k I^{n-k}$

or $\forall k > 2$ $\Pi^k = 0$ et $I^{n-k} = I$ $\forall k \in [\![0, n]\!]$

d'où $S^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \Pi^k = 1.I + n.\Pi + \frac{n!}{2!(n-2)!}\Pi^2$

$= I + n\Pi + \frac{n(n-1)}{2}\Pi^2$

ⓑ On reprend l'expression trouvée en 2ⓐ

$$S^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n & n & 0 \\ -3n & -n & n \\ n & 0 & -n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} \\ -n(n+1) & -n(n+1) & -n(n+1) \\ \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2n+\frac{n(n+1)}{2} & n+\frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} \\ -3n-n(n+1) & 1-n-n(n+1) & n-n(n+1) \\ n+\frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & 1-n+\frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix}$$

3 a) $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 1.v_n + 0.w_n \\ v_{n+1} = -3u_n + 0.v_n + 1.w_n \\ w_{n+1} = 1.u_n + 0.v_n + 0.w_n \end{cases}$ d'où $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

or $S = I + N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{P(n) : \text{"} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \text{"}}$

b) Récurrence : Initialisation $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = S^0 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ car $S^0 = I$ donc $P(0)$ vraie

Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$

on a $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = S . S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = S^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$

d'où $P(n)$ vraie $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vraie.

Conclusion : par le principe de récurrence $P(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) soit $n \in \mathbb{N}$ $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

on remarque que $S^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donne un vecteur colonne égal à la 2e colonne de S^n qu'on a justement calculée en 2.b). Il suffit de recopier la réponse.

→

④ ⓐ $V = -\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad w = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

ⓑ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

donc $P.P = I$ d'où P inversible et $P^{-1} = P$

ⓒ On fait le calcul en commençant par MP puis $P(MP)$

et on trouve $J = PMP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

J est bien triangulaire supérieure à coefficients diagonaux nuls et P est inversible.

Exercice II ① $u_2 = \dfrac{1^2}{1+2} = \dfrac{1}{3}$ $\qquad v_2 = \dfrac{2^2}{1+2} = \dfrac{4}{3}$

$u_3 = \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}} = \dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{3}} = \dfrac{1}{15}$ $\qquad v_3 = \dfrac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{\frac{5}{3}} = \dfrac{16}{15}$

② $_{n\geq 1}$ $P(n)$: " $u_n > 0$ et $v_n > 0$ "

Initialisation : $u_1 > 0$ $\quad v_1 > 0$

Hérédité : on suppose qu'il existe $n \geq 1$ tel que $P(n)$ soit vraie.

$u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n}$ or $u_n > 0$ et $v_n > 0$ donc $u_n^2 > 0$ et $u_n + v_n > 0$

d'où $\dfrac{u_n^2}{u_n+v_n} > 0$ d'où $u_{n+1} > 0$

de même $v_{n+1} > 0$ donc $P(n+1)$ vraie.

Conclusion : par le principe de récurrence, $\forall n \geq 1$ $P(n)$ vraie.

donc $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

③ soit $n \in \mathbb{N}^*$

$u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$ pour étudier la monotonie on étudie le ratio $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_n}{u_n + v_n}$ or $u_n + v_n > u_n$ car $v_n > 0$

d'où $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Un raisonnement similaire montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

Frédéric BROSSARD brossardmaths@gmail.com

Les deux suites sont décroissantes et minorées par 0, elles sont donc convergentes (théorème de la convergence monotone).

4) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n+v_n} - \dfrac{v_n^2}{u_n+v_n} = \dfrac{(u_n+v_n)(u_n-v_n)}{u_n+v_n} = u_n - v_n$

la suite $(u_n - v_n)_{n\geq 1}$ est donc constante et égale à $u_0 - v_0$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n - v_n = -1$

comme les deux suites convergent, on peut passer à la limite

d'où $\quad \ell - \ell' = -1 \quad$ donc $\quad \ell = \ell' - 1$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad u_{n+1}(u_n + v_n) = u_n^2$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ $\quad$ d'où en passant à la limite : $\ell(\ell+\ell') = \ell^2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 = \ell^2$ $\quad$ soit $\ell\ell' = 0$

⚠ ⚠ ERREUR DANS L'ENONCE ⚠

c) $\left.\begin{matrix} \ell = \ell' - 1 \\ \ell\ell' = 0 \end{matrix}\right\}$ donc $\ell = 0$ ou $\ell' = 0$

mais si $\ell' = 0$ on aurait $\ell = -1$

or $\forall n \geq 1$ $\quad u_n > 0$ $\quad$ donc $\ell \geq 0$ $\quad$ d'où $\ell' \neq 0$

donc $\ell \neq -1$

$\ell\ell' = 0$ et $\ell' \neq 0$ $\Rightarrow$ Donc $\ell = 0$ et $\ell' = 1$

5) 6 : $\quad$ u = u^2 / (u+v)
7 : $\quad$ v = v^2 / (u+v)

6) a) s contient $(1, u_2, \dots, u_n)$ or $u_1 = 1$ donc s contient les n premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

y contient $\left(\sum_{i=1}^{1} u_i, \sum_{i=1}^{2} u_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} u_i\right)$ soit les n premières sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

b) On constate que $\sum_{i=1}^{n} u_i$ semble majorée par 1.4

donc la série à termes positifs $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente (conjecture)

car la suite de ses sommes partielles est majorée

Frédéric BROSSARD brossardmaths@gmail.com

Exercice 3

1) . si $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ $f(x) = 0$ donc $f(x) \geq 0$

. si $x \in]0,1]$ $f(x) = \frac{1+a}{2}$ donc $f(x) \geq 0$ car $a \geq -\frac{1}{2}$

. si $x \in [-1,0]$ $f(x) = \frac{1-a}{2}$ donc $f(x) \geq 0$ car $a \leq \frac{1}{2}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq 0$

- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en $\{0, 1, -1\}$

- $\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt$ converge car f est nulle sur $]-\infty,-1[$

$\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge car f est nulle sur $[1,+\infty[$.

$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ est définie car f continue par morceaux sur $[-1,1]$

d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-1}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{1} f(t)\,dt = \left[\frac{1-a}{2}\,x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1+a}{2}\right]_{0}^{1}$

$= \frac{1-a}{2} + \frac{1+a}{2} = 1$

donc f est une densité de probabilité

2) Par le même raisonnement que précédemment et l'utilisation du théorème de transfert on montre que $E(X) = \int_{-1}^{1} t f(t)\,dt$ et que $E(X^2) = \int_{-1}^{1} t^2 f(t)\,dt$.

d'où $E(X) = \int_{-1}^{0} \frac{1-a}{2}\, t\,dt + \int_{0}^{1} \frac{1+a}{2}\, t\,dt = \left(\frac{1-a}{2}\right)\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left(\frac{1+a}{2}\right)\left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{1}$

$= \frac{a-1}{4} + \frac{a+1}{4} = \frac{a}{2}$

La formule de Koenig Huygens nous permet d'écrire que $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

or $E(X^2) = \left(\frac{1-a}{2}\right)\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left(\frac{1+a}{2}\right)\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = \frac{1-a}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1+a}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

d'où $V(X) = \frac{1}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{4-3a^2}{12}$

3) Si $x \leq -1$ $F_X(x) = 0$

si $x \geq 1$ $F_X(x) = 1$

Frédéric BROSSARD brossardmaths@gmail.com

Si $-1 \leq x \leq 0$ $\quad F_X(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1-a}{2}\, dt = \left(\frac{1-a}{2}\right)(x+1)$

si $0 \leq x \leq 1$ $\quad F_X(x) = \int_{-1}^{0} \frac{1-a}{2}\, dt + \int_{0}^{x} \frac{1+a}{2}\, dt$

$$= \frac{1-a}{2} + \left(\frac{1+a}{2}\right)x$$

4° a) Chacune des variables X_i admet $\frac{a}{2}$ comme espérance.

donc $E(2\overline{X}_n) = 2E(X_n) = \frac{2}{n}\left(\frac{a}{2} + \cdots + \frac{a}{2}\right) = a$

(on utilise la linéarité de l'espérance et le fait que les X_i sont indépendants

$E(Y_n) - a = 0$ donc Y_n est un estimateur sans biais de a.

b) le risque quadratique est $V(Y_n)$ car l'estimateur est sans biais

or $V(Y_n) = V(2\overline{X}_n) = 4V(\overline{X}_n) = \frac{4}{n^2}\sum_{1}^{n} V(X_i)$

(car les X_i sont indépendantes) $\quad = \frac{4}{n^2} \cdot n \cdot \left(\frac{4-3a^2}{12}\right)$

$$= \frac{4}{n}\left(\frac{4-3a^2}{12}\right) = \frac{4-3a^2}{3n}$$

c) Bienaymé Tchebychev soit $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|Y_n - E(Y_n)| > \varepsilon) \leq \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2}$$

Mais $\mathbb{P}(|Y_n - E(Y_n)| > \varepsilon) = 1 - P(|Y_n - E(Y_n)| \leq \varepsilon)$ $\quad (E(Y_n) = a)$

d'où $\quad P(|Y_n - a| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2}$

$$1 - \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{4}{3n\varepsilon^2} + \frac{a^2}{n\varepsilon^2}$$

d'où $\quad 1 - \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{4}{3n\varepsilon^2}$

d'où $\quad P(|Y_n - a| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{4}{3n\varepsilon^2}$

5 a) On pose $\begin{cases} U_k = 0 & \text{si } X_k \leq \frac{1}{2} \\ U_k = 1 & \text{si } X_k > \frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad U_k$ est une VA $\hookrightarrow$ Bernoulli

$P(U_k = 0) = P(X_k \leq \frac{1}{2}) = F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-a}{2} + \left(\frac{1+a}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-a}{2} + \frac{1+a}{4}$

$= \frac{3-a}{4}$

Comme les X_k sont indépendantes, les U_k sont indépendantes et Z_n apparait comme une somme de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p = \frac{3-a}{4}$

d'où $Z_n \hookrightarrow B\left(n, \frac{3-a}{4}\right)$

Même raisonnement pour T_n $\qquad T_n \hookrightarrow B\left(n, \frac{1+a}{4}\right)$

ⓑ $E(W_n) = 1 + \frac{2}{n} E(T_n - Z_n)$

Mais $\quad E(T_n) = \left(\frac{1+a}{4}\right)n \quad E(Z_n) = \left(\frac{3-a}{4}\right)n$

d'où $\quad E(W_n) = 1 + \frac{2}{n}\left(\frac{1+a}{4}\right)n - \frac{2}{n}\left(\frac{3-a}{4}\right)n$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{a}{2} - \frac{3}{2} + \frac{a}{2} = a$$

donc W_n est un estimateur sans biais de a.

ⓒ $T_n + Z_n = n$ puisque les X_n prennent soit des valeurs inférieures ou égales à $\frac{1}{2}$, soit des valeurs strictement supérieures à $\frac{1}{2}$

$V(T_n + Z_n) = 0$

or $\quad V(T_n + Z_n) = V(T_n) + V(Z_n) + 2\operatorname{cov}(T_n, Z_n)$

d'où $\quad \operatorname{cov}(T_n, Z_n) = -\frac{1}{2}\left[V(T_n) + V(Z_n)\right]$

$$V(T_n) = n \cdot \left(\frac{1+a}{4}\right)\left(1 - \frac{1+a}{4}\right) = n\left(\frac{1+a}{4}\right)\left(\frac{3-a}{4}\right)$$

$$V(Z_n) = n\left(\frac{3-a}{4}\right)\left(1 - \frac{3-a}{4}\right) = n\left(\frac{1+a}{4}\right)\left(\frac{3-a}{4}\right)$$

d'où $\quad \operatorname{cov}(T_n, Z_n) = -n\left(\frac{1+a}{4}\right)\left(\frac{3-a}{4}\right)$

ⓓ $V(W_n) = \frac{4}{n^2} V(T_n - Z_n) = \frac{4}{n^2}\left[V(T_n) + V(Z_n) - 2\operatorname{cov}(T_n, Z_n)\right]$

$$= \frac{4}{n^2}\left(2n\left(\frac{1+a}{4}\right)\left(\frac{3-a}{4}\right) + 2n\left(\frac{1+a}{4}\right)\left(\frac{3-a}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1+a}{4}\right)\left(\frac{3-a}{4}\right)$$

W_n étant un estimateur sans biais de a le risque quadratique est $V(W_n)$ donc la limite est 0 quand n tend vers $+\infty$

Frédéric BROSSARD brossardmaths@gmail.com

Exercice 4

1) a) la fonction $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto -x^2$ est décroissante sur $[0,1]$ donc la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est décroissante sur $[0,1]$ et positive.

D'où $\forall x \in [0,1]$ $\quad 0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-0^2}$ d'où $\quad 0 \leq e^{-x^2} \leq 1$.

b) soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad \forall x \in [0,1]$ $\quad 0 \leq e^{-x^2} \leq 1$

donc $\quad 0 \leq x^n e^{-x^2} \leq x^n$

les fonctions $x \mapsto x^n e^{-x^2}$ et $x \mapsto x^n$ sont continues, on peut donc intégrer l'inégalité entre 0 et 1

d'où $$\int_0^1 0 \, dt \leq \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

d'où $$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

c) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc par encadrement $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

2) a) $\forall x \in [0,1]$ $\quad f'(x) = -2x e^{-x^2}$

b) $$I_1 = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx = -\frac{1}{2} \left[f(x) \right]_0^1 = -\frac{1}{2} \left[e^{-x^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$$

3) a) On pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = x e^{-x^2} \end{cases}$ $\quad u'(x) = (n+1) x^n$, $\quad v(x) = -\frac{f(x)}{2} = -\frac{e^{-x^2}}{2}$

u et v sont C^1 sur $[0,1]$

$$I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2} e^{-x^2} dx = \left[-\frac{x^{n+1}}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 (n+1) x^n e^{-x^2} dx$$
$$= -\frac{1}{2e} + \frac{n+1}{2} \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2e}$$

b) $$I_{n+2} = \frac{n I_n}{2} + \frac{I_n}{2} - \frac{1}{2e}$$

d'où $$n I_n = 2 I_{n+2} - I_n + \frac{1}{e}$$

or $\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} I_{n+2} = 0$ $\quad$ d'où $\lim_{n \to +\infty} n I_n = \frac{1}{e}$

4) a) $u_n = \dfrac{I_{2n+1}}{n!}$ $\qquad u_{n+1} = \dfrac{I_{2n+3}}{(n+1)!}$

or $I_{2n+3} = \dfrac{2n+2}{2} I_{2n+1} - \dfrac{1}{2e}$

d'où $\dfrac{I_{2n+3}}{(n+1)!} = \dfrac{2n+2}{2} \dfrac{I_{2n+1}}{(n+1)!} - \dfrac{1}{2e(n+1)!}$

Mais $\dfrac{2n+2}{2} \times \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!}$

donc $\dfrac{I_{2n+3}}{(n+1)!} = \dfrac{I_{2n+1}}{n!} - \dfrac{1}{2e(n+1)!}$ soit $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{2e(n+1)!}$

de même $u_n = u_{n-1} - \dfrac{1}{2e\, n!}$, $u_{n-1} = u_{n-2} - \dfrac{1}{2e(n-1)!}$ ...

d'où $u_n = u_0 - \dfrac{1}{2e n!} - \dfrac{1}{2e(n-1)!} - \dots - \dfrac{1}{2e\,1!}$

avec $u_0 = I_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2e}$ or $\dfrac{1}{2e} = \dfrac{1}{2e\,0!}$

d'où $u_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2en!} - \dfrac{1}{2e(n-1)!} - \dots - \dfrac{1}{2e\,1!} - \dfrac{1}{2e\,0!}$

$u_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2e} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$

b) $I_{2n+1} = n!\, u_n = \dfrac{n!}{2} - \dfrac{1}{2e} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{k!}$

c) en utilisant 3a) $I_{2k+1} = \dfrac{2k-1+1}{2} I_{2k-1} - \dfrac{1}{2e} = k\, I_{2k-1} - \dfrac{1}{2e}$

4) I = k*I - 1/(2*%e)