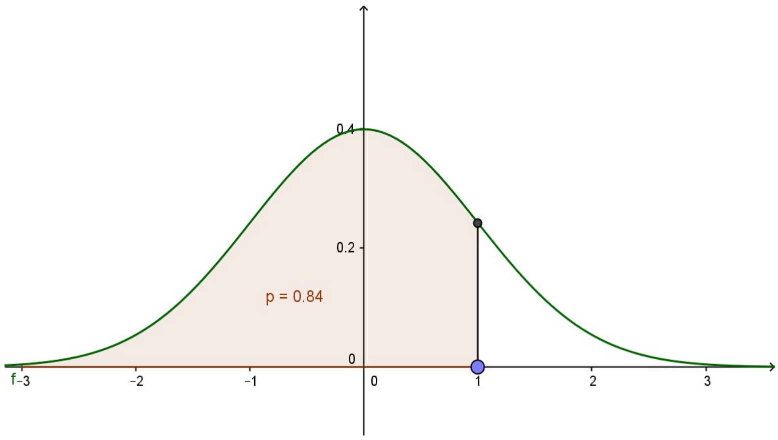

Figure 1

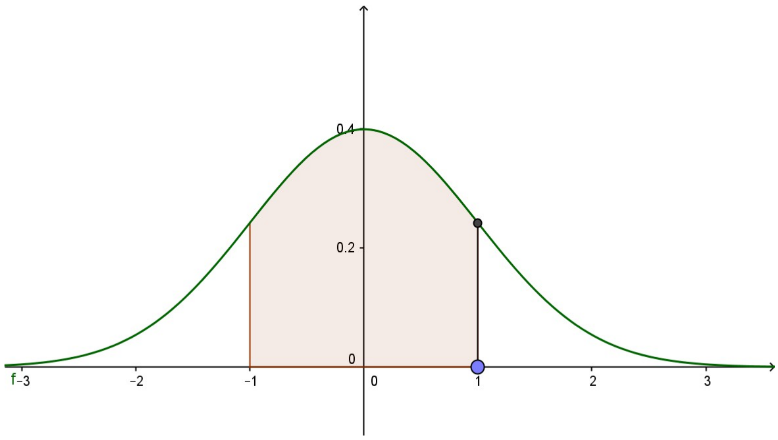

Figure 2

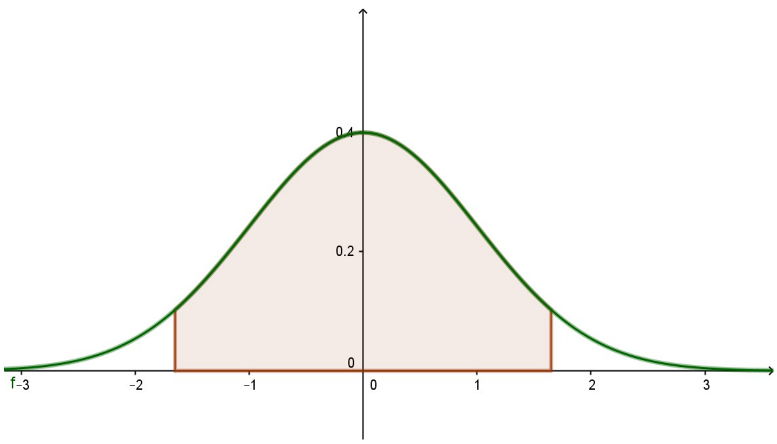

Figure 3

Annexe 1

Devoir Surveillé

I. Un intervalle de fluctuation à 90%

Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par son expression : $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-x^2}{2}}$

On rappelle que ϕ est la fonction densité de probabilité de la loi normale centrée réduite N(0;1)
La courbe de ϕ est donnée à l'annexe 1.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

I.1 Sur la figure 1, l'aire de la surface sous la courbe de f, coloriée, est égale à 0,84. Quelle information cela donne-t-il sur X ?

I.2 Calculer, sans utiliser les fonctions statistiques de la calculatrice, la probabilité que X prenne des valeurs comprises dans l'intervalle [-1 ; 1]. On pourra s'aider de la figure 2.

I.3 On souhaite déterminer le réel positif $u_{0,1}$ tel que : $p(-u_{0,1}\leq X\leq u_{0,1})=0,9$
On pourra considérer la figure 3 pour mieux comprendre le problème.
On note, pour tout $t\in\mathbb{R}^+$: $f(t)=p(-t\leq X\leq t)$
On note Φ la fonction de répartition de X, c'est-à-dire la fonction telle que :

pour tout $x\in\mathbb{R}$: $p(X\leq x)=\Phi(x)$

On rappelle que Φ est une fonction continue et croissante sur $\mathbb{R}$

I.3.a Démontrer : pour tout $t\in\mathbb{R}^+$: $f(t)=2\Phi(t)-1$
I.3.b Donner les limites de Φ aux infinis, en déduire celle de f en $+\infty$.
I.3.c Donner le tableau de variations de f.
I.3.d Justifier : il existe un unique réel $u_{0,1}$ tel que $f(u_{0,1})=0,9$
I.3.e Donner un encadrement à 10^{-1} près de $u_{0,1}$.

Ce nombre $u_{0,1}$ est utilisé à la place du facteur 1,96 dans la définition de l'intervalle de fluctuation usuel à 95%.

****

II. Un candidat doit passer plusieurs épreuves du même type.

II.1 Première modélisation

Le candidat passe quatre épreuves.
On suppose que la probabilité de réussite du candidat à une épreuve donnée est fixe, égale à 0,3.
Calculer la probabilité que le candidat réussisse au moins deux épreuves.

II.2 Deuxième modélisation

Une étude plus fine montre que si le candidat réussit une épreuve, la probabilité qu'il réussisse la suivante est 0,4, mais que s'il échoue, la probabilité de réussite à la tentative suivante n'est plus que de 0,2.
On suppose que la probabilité de réussite à la première épreuve est 0,3.
On note, pour n entier naturel, R_n : " L'épreuve n est réussie. "
Ainsi, la première épreuve est indexé par 0.
La probabilité de l'événement R_n est notée : $p(R_n)=p_n$

II.2.1 Justifier : pour n entier naturel : $p_{n+1}=0{,}2\, p_n+0{,}2$

II.2.2 On pose $v_n=p_n-0{,}25$
Montrer que la suite (v_n) est géométrique, en préciser la raison et le premier terme v_0
II.2.3 Donner l'expression de v_n puis de p_n en fonction de n.
II.2.4 Donner, en justifiant, la limite de la suite (p_n)

****

III. i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère la suite de nombre complexes (z_n) définie par la relation de récurrence :

pour tout $n \in \mathbb{N}$ $z_{n+1}=2e^{i.\frac{\pi}{3}}.z_n$ et $z_0=i$

III.1 Calculer z_1 et z_2 sous forme algébrique.
III.2 Donner la forme exponentielle de z_1 .
III.3 Question ouverte : peut-on trouver un entier naturel n tel que z_n soit un réel positif ?

****

IV. Les trois questions qui suivent sont indépendantes.

IV.1 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs vérifiant les propriétés suivantes :

$u_0=1$ et pour tout entier naturel n $\ln(u_{n+1})=\ln(u_n)-1$

Question : (u_n) est-elle géométrique ?

IV.2 Soit (v_n) une suite de réels strictement positifs. On pose $w_n=1-\ln(v_n)$
La propriété P est : si (v_n) est majorée, alors (w_n) est majorée.
Question : P est-elle vraie ?

IV.3 Soit (a_n) la suite de réels strictement positifs définis par :

$a_0=1$ et pour tout entier naturel n $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$

Question : (a_n) est-elle une suite convergente ?

Barème : 9/5/3/3