Ex 95

Partie A - Exemple :

(1) : $x^3 = 3x + 14$

1) $x = u + v$

a) (1) $\Leftrightarrow (u+v)^3 = 3(u+v) + 14$

$\Leftrightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = 3(u+v) + 14$

$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = 3(u+v) + 14$

$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - 3(u+v) = 14$

$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + 3(u+v)(uv-1) = 14$

b) • Il suffit que $uv = 1$ pour que :

(1) $\Leftrightarrow u^3 + v^3 = 14$

Car : $uv = 1 \Rightarrow uv - 1 = 0$

$\Rightarrow 3(u+v)(uv-1) = 0$

$\Rightarrow u^3 + v^3 = 14$.

• Si $uv = 1 \Rightarrow (uv)^3 = 1^3$

$\Rightarrow \boxed{u^3 v^3 = 1}$

2) $U = u^3$ et $V = v^3$

a) (2) : $X^2 - 14X + 1 = 0$.

Si U et V sont solutions de (2) alors :

$X^2 - 14X + 1 = (X - U)(X - V)$.

On a : $(X-U)(X-V) = (X-u^3)(X-v^3)$

$= X^2 - Xv^3 - Xu^3 + u^3v^3$

$= X^2 - (u^3+v^3)X + u^3v^3$

Dans la question 1) b), u et v sont tels que $uv = 1$ et donc : $u^3v^3 = 1$ et $u^3 + v^3 = 14$ d'où

$(X-U)(X-V) = X^2 - 14X + 1$

Donc U et V sont bien solutions de (2).

b) (2) : $X^2 - 14X + 1 = 0$.

$\Delta = (-14)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 192 = 8^2 \times 3$

$X_1 = U = \frac{14 - 8\sqrt{3}}{2} = \boxed{7 - 4\sqrt{3}}$

$X_2 = V = \frac{14 + 8\sqrt{3}}{2} = \boxed{7 + 4\sqrt{3}}$

3) a) $U = 7 - 4\sqrt{3} \Longleftrightarrow u^3 = 7 - 4\sqrt{3} \Longrightarrow u = \sqrt[3]{7 - 4\sqrt{3}}$

$V = 7 + 4\sqrt{3} \Longleftrightarrow v^3 = 7 + 4\sqrt{3} \Longrightarrow v = \sqrt[3]{7 + 4\sqrt{3}}$

$\boxed{x = u + v = \sqrt[3]{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt[3]{7 + 4\sqrt{3}}}$

b)

$$f(x) = x^3 - 3x - 14$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$= 3(x^2 - 1)$$
$$= 3(x-1)(x+1)$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-12	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1) = -12$

$f(1) = -16$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

Selon le tableau de variation, comme f est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et que $f(1) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) > 0$ alors, d'aprés le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x_0 \in]1; +\infty[$ tel que $f(x_0) = 0$.

Sur $]-\infty; -1]$ et $[-1; 1]$; $f(x) < 0$ $\forall x$.

Donc (1) admet qu'une seule solution sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

1). Dans le texte de Tartaglia, le mot "chose" signifie une variable inconnue qu'on peut nommer x.

- L'expression "chose principale" signifie la solution de l'équation à résoudre.
- Dans l'équation (1) de la partie A, "le tiers cubé des choses" représente