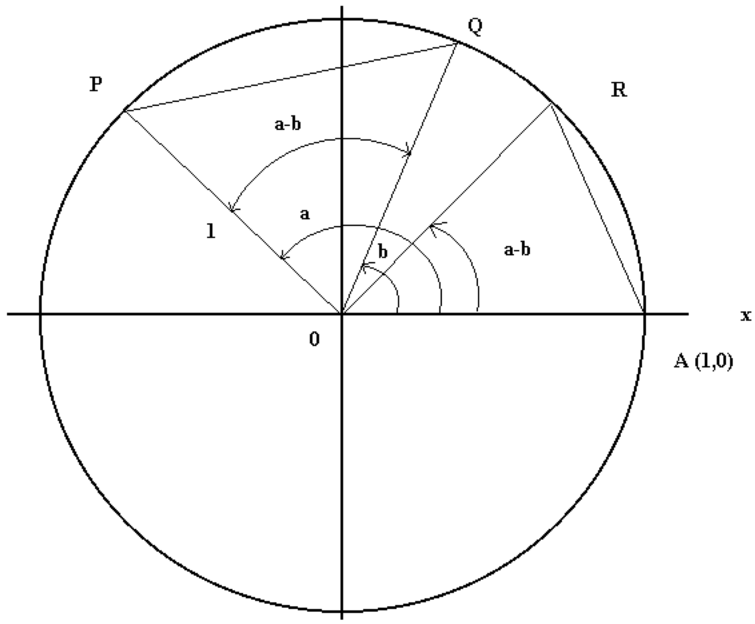

Figure 1:

Formules d'addition trigonométriques

La figure 1 est le cercle trigonométrique de rayon 1. Considérons les angles a et b, correspondant aux points P et Q. Les coordonnées cartésiennes de ces points sont:

P: X=cos(a), Y=sin(a)
Q: X=cos(b), Y=sin(b)

Le triangle OPQ est formé par la soustraction des angles a et b, c'est un angle a-b, équivalent au point R. On fait pivoter ce triangle autour du point O pour former le triangle ORA. Les coordonnées cartésiennes du point R seront donc:

X=cos(a-b), Y=sin(a-b).

Maintenant considérons le segment PQ. Sa longueur au carré est:

$(segmentPQ)^2 = (cos(b) - cos(a))^2 + (sin(b) - sin(a))^2$
$= cos^2(b) + cos^2(a) - 2cos(a)cos(b) + sin^2(b) + sin^2(a) - 2sin(a)sin(b)$

et puisque $cos^2(b) + sin^2(b) = 1$ et $cos^2(a) + sin^2(a) = 1$:

$= 2 - 2(cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b))$

La longueur du segment RA au carré est:

$(segmentRA)^2 = (cos(a-b)-1)^2 + (sin(a-b)-0)^2$
$= cos^2(a-b) - 2cos(a-b) + 1 + sin^2(a-b)$
$= 2 - 2cos(a-b)$

Mais puisque les triangles OPQ et ORA sont les mêmes, le segment PQ = le segment RA donc:

2 - 2 (cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)) = 2 - 2 cos (a-b), soit:
cos (a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b) : (identité 1)

En exploitant les identités cos(-a)=cos(a), sin(-a) = -sin(a), sin(pi/2 - a) = cos(a) et cos(pi/2 - a) = sin(a), on obtient:

cos(a+b) = cos(a-(-b)) = cos(a)cos(-b) + sin(a)sin(-b) =
cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b) : (identité 2)

sin(a+b) = cos(pi/2 - (a+b)) = cos((pi/2 - a) - b)) = cos(pi/2 - a)cos(b) + sin(pi/2-a)sin(b)
= sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b) : (identité 3)

sin(a-b) = sin(a+(-b)) = sin(a)cos(-b) + cos(a)sin(-b) =
sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b) : (identité 4)

tan(a-b) = sin(a-b)/cos(a-b) = [sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b)] / [cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)].

En divisant le numérateur et le dénominateur par cos(a)cos(b) on obtient:
[tan(a) - tan(b)] / [1 + tan(a)tan(b)] : (identité 5)

tan(a+b) = tan(a-(-b)) = [tan(a) - tan(-b)] / [1 + tan(a)tan(-b)] =
[tan(a) + tan(b)] / [1 - tan(a)tan(b)] : (identité 6)

Si a = b, alors on a:

cos(2a) = cos(a+a) = cos(a)cos(a) - sin(a)sin(a) = cos2 a - sin2 a : (identité 7)

sin(2a) = sin(a+a) = sin(a)cos(a) + cos(a)sin(a) = 2 sin(a)cos(a) : (identité 8)

$\tan(2a) = \tan(a+a) =$ [tan(a) + tan(a)] / [1 - tan(a)tan(a)] = 2 tan(a) / [1 - tan2(a)] : (identité 9)